

NOUVEAUX EXERCICES

DE

MATHÉMATIQUES,

PAR

M. AUGUSTIN LOUIS CAUCHY,
MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS, DE LA SOCIETÉ ROYALE DE LONDRES, ETC.





Prague.

1835.

IMPRIMÉ CHEZ JEAN SPURNY.



NOUVEAUX EXERCICES

DE

MATHÉMATIQUES,

PAR

M. Augustin Louis Cauchy.

La bienveillance avec laquelle les géomètres, et les personnes adonnées à la culture des sciences, ont accueilli les deux ouvrages que j'ai publiés, à Paris sous le titre d'Exercices de Mathématiques, à Turin sous le titre de Résumés analytiques, m'encourage à faire paraître aujourd'hui un troisième recueil destiné à offrir le développement des théories exposées dans les deux premiers, et les résultats aux quels de nouvelles recherches m'auront conduit. On sait assez quels événements m'ont fait un devoir de renoncer aux trois chaires que j'occupais en France, et quelle voix auguste a pu seule me déterminer à quitter encore la chaire de Physique Mathématique que le Roi de Sardaigne avait daigné me confier. Mais ce n'est pas sans doute auprès des descendants de Louis XIV, auprès de ces Princes protecteurs si éclairés des lettres et des sciences, que je pourrais me croire dispensé de faire de continuels

efforts pour contribuer à leurs progrès. Les nouveaux Exercices paraîtront comme les précédents par livraisons qui, s'il est possible, car sur cette terre et dans ce siècle surtout on ne saurait répondre du lendemain, se succéderont à des époques peu éloignées les unes des autres. Les premières livraisons offriront en totalité le Mémoire sur la dispersion de la lumière, Mémoire dont les deux premiers paragraphes seulement ont été déjà publiés en 1830.

A la dernière livraison de chaque année sera jointe une table des matières.

MÉMOIRE

SUR

LA DISPERSION DE LA LUMIÈRE

PAR

M. A. L. CAUCHY,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS, DES SOCIÉTÉS ROYALES DE LONDRES, DE BERLIN, DE PRAGUE, ETC.

PUBLIÉ PAR LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE PRAGUE.



PRAGUE,

CHEZ *J. G. CALVE*, LIBRAIRE.

1836.

Avis au Lecteur.

Il y a environ un an, que Monsieur ***A. L. Cauchy***, connu par des ouvrages qui le mettent au rang des premiers mathématiciens, présenta à la Société royale des Sciences son dernier traité, intitulé: ***Mémoire sur la Dispersion de la Lumière***, pour le recevoir au nombre des dissertations, que cette Société publie de temps à autre, et qu' elle fait imprimer à ses frais.

La Société royale, toujours empressée de contribuer à l'avancement des sciences, et par cette raison prête à tous les sacrifices, résolut de faire examiner, par une commission choisie dans son sein, le traité de M. ***Cauchy***, et d'en faire statuer sur le mérite pour l'impression.

Le rapport de cette commission, étant de la teneur: »que ce traité concernait une des branches les plus importantes de la physique et de la mécanique, qu'il étendait de beaucoup les connaissances dans ces matières, qu'il surpassait tous les traités semblables d'autres écrivains dans cette partie, et qu'en conséquence les sciences physico-mathématiques feraient, par cette publication, un progrès considérable;« la Société royale accepta le manuscrit de M. ***Cauchy***, pour le faire imprimer.

Mais, comme, par des présentations supplémentaires de la continuation du manuscrit, le traité dépassait les bornes d'une dissertation, il ne pouvait être reçu dans la série de celles, que la Société royale publie de temps en temps, et il a du être imprimé comme un ouvrage séparé et indépendant. On a choisi pour cet effet, un plus grand format, savoir le format in-quarto afin de mieux rendre les longues formules et les tables très-étendues de l'auteur, et de mettre au jour une édition aussi élégante et correcte que possible.

Prague, le 10 juin 1836.

La Société royale des Sciences de Prague en Bohème.

MÉMOIRE

SUR LA DISPERSION DE LA LUMIÈRE.

Considérations générales.

Dans un mémoire précédent, nous avons fait voir comment les lois de propagation et de polarisation de la lumière pouvaient se déduire des équations aux différences partielles qui représentent le mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle [voyez le cinquième volume des *Exercices de mathématiques*]. Toutefois, comme les formules (11) de la page 131 du quatrième volume des *Exercices*, auxquelles nous avons eu recours, ne sont qu'approximatives, les lois que nous avons établies ne sont pas rigoureusement exactes. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que, dans l'énoncé de ces lois, on ne trouve rien qui soit relatif à la nature de la couleur. Or la dispersion des couleurs par le prisme prouve que, dans les corps transparents, la vitesse de propagation de la lumière n'est pas la même pour les différentes couleurs. D'ailleurs les physiciens qui ont adopté l'hypothèse des ondulations lumineuses, supposent avec raison que la nature de chaque couleur est déterminée par la durée plus ou moins grande des oscillations des molécules de l'éther, de même que la nature du son produit dans un corps solide ou fluide est déterminée par la durée plus ou moins grande des oscillations des molécules de ce corps. Il est donc naturel d'admettre qu'il existe une relation entre la vitesse de propagation de la lumière et la durée des vibrations lumineuses. Or cette relation ne saurait se déduire des équations aux différences partielles inscrites sous le n.° (11), à la page 131 du 4.° volume des *Exercices*. Mais il importe de remarquer que ces équations se tirent elles-mêmes de formules plus générales que j'ai données dans le troisième volume [pages 190 et suivantes]. Frappé de cette idée, M. Coriolis me conseilla de rechercher si la considération des termes que j'avais négligés en passant des unes aux autres ne fournirait pas le moyen d'expliquer la dispersion des couleurs. En suivant ce conseil, je suis heureusement parvenu à des formules à l'aide desquelles on peut non-seulement assigner la cause du phénomène dont il s'agit, mais encore en découvrir les lois qui, malgré les nombreux et importants travaux des physiciens sur cette matière, étaient restées inconnues jusqu'à ce jour.

Pour que l'on puisse saisir plus facilement les principes sur lesquels repose l'analyse dont je vais faire usage, je reproduirai d'abord en peu de mots les équations différentiel-

les qui déterminent le mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle.

---

§. 1.er *Equations différentielles du mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle.*

Considérons un système de molécules ou points matériels distribués arbitrairement dans une portion de l'espace et sollicités au mouvement par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. Soient m la masse d'une de ces molécules, m, m', m'', ... celles des autres, et supposons que, dans un état d'équilibre du système, x, y, z désignent les coordonnées de la molécule m rapportées à trois axes rectangulaires,
$x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ les coordonnées d'une autre molécule m,
r la distance des molécules m et m,
α, β, γ les angles formés par le rayon vecteur r avec les demi-axes des coordonnées positives. Admettons d'ailleurs que l'attraction ou la répulsion mutuelle des deux masses m et m, étant proportionnelle à ces masses et à une fonction de la distance r, soit représentée, au signe près, par

$$(1) \qquad \mathrm{m}m\mathrm{f}(r)$$

$\mathrm{f}(r)$ désignant une quantité positive lorsque les masses m, m s'attirent, et négative lorsqu'elles se repoussent. La résultante des attractions ou répulsions exercées sur la molécule m par les molécules m, m', ..., aura pour projections algébriques sur les axes coordonnés

$$(2) \qquad \mathrm{mS}[m\cos\alpha\mathrm{f}(r)], \quad \mathrm{mS}[m\cos\beta\mathrm{f}(r)], \quad \mathrm{mS}[m\cos\gamma\mathrm{f}(r)]$$

la lettre S indiquant une somme de termes semblables, mais relatifs aux diverses molécules m, m', etc....; et, puisque le système est, par hypothèse, en équilibre, on aura nécessairement

$$(3) \qquad \mathrm{S}[m\cos\alpha\mathrm{f}(r)]=0, \quad \mathrm{S}[m\cos\beta\mathrm{f}(r)]=0, \quad \mathrm{S}[m\cos\gamma\mathrm{f}(r)]=0.$$

Ajoutons que les quantités Δx, Δy, Δz pourront être exprimées en fonction de r et des angles α, β, γ par les formules

$$(4) \qquad \Delta x=r\cos\alpha, \quad \Delta y=r\cos\beta, \quad \Delta z=r\cos\gamma.$$

Supposons maintenant que, le système venant à se mouvoir, les molécules m, m,

m', ..., se déplacent dans l'espace, mais de manière que la distance de deux molécules m et m varie dans un rapport peu différent de l'unité. Soient, au bout du temps t,

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta$$

des fonctions de x, y, z, t qui représentent les déplacements très-petits de la molécule m, mesurés parallèlement aux axes coordonnés, et

$$r(1+\varepsilon)$$

la distance des deux molécules m, m. La quantité très-petite ε exprimera la dilatation linéaire mesurée suivant le rayon vecteur r; et, comme les coordonnées respectives des molécules m, m deviendront

$$x+\xi, \quad y+\eta, \quad z+\zeta; \quad x+\xi+\Delta(x+\xi), \quad y+\eta+\Delta(y+\eta), \quad z+\zeta+\Delta(z+\zeta),$$

les projections algébriques de la distance $r(1+\varepsilon)$ seront évidemment

$$\Delta x+\Delta\xi, \qquad \Delta y+\Delta\eta, \qquad \Delta z+\Delta\zeta,$$

ou, ce qui revient au même,

$$r\cos\alpha+\Delta\xi, \qquad r\cos\beta+\Delta\eta, \qquad r\cos\gamma+\Delta\zeta.$$

On trouvera par suite

$$(5) \qquad r^2(1+\varepsilon)^2=(r\cos\alpha+\Delta\xi)^2+(r\cos\beta+\Delta\eta)^2+(r\cos\gamma+\Delta\zeta)^2,$$

et l'on en conclura

$$(6) \qquad 1+\varepsilon=\sqrt{\left\{1+\frac{2}{r}(\cos\alpha\,\Delta\xi+\cos\beta\,\Delta\eta+\cos\gamma\,\Delta\zeta)+\frac{1}{r^2}(\Delta\xi^2+\Delta\eta^2+\Delta\zeta^2)\right\}}.$$

D'ailleurs, au bout du temps t, le rayon vecteur mené de la molécule m à la molécule m formera, avec les demi-axes des coordonnées positives, des angles dont les cosinus seront représentés, non plus par

$$(7) \qquad \cos\alpha=\frac{\Delta x}{r}, \qquad \cos\beta=\frac{\Delta y}{r}, \qquad \cos\gamma=\frac{\Delta z}{r},$$

mais par

$$(8)\quad \frac{\Delta x+\Delta\xi}{r(1+\varepsilon)}=\frac{\cos\alpha+\frac{\Delta\xi}{r}}{1+\varepsilon},\quad \frac{\Delta y+\Delta\eta}{r(1+\varepsilon)}=\frac{\cos\alpha+\frac{\Delta\eta}{r}}{1+\varepsilon},\quad \frac{\Delta z+\Delta\zeta}{r(1+\varepsilon)}=\frac{\cos\gamma+\frac{\Delta\zeta}{r}}{1+\varepsilon}.$$

En conséquence, les projections algébriques de la force motrice résultante des attractions ou répulsions exercées par les molécules m, m', ... sur la molécule m, deviendront respectivement égales aux trois produits

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{c} \mathrm{m\,S}\left\{m\left(\cos\alpha+\frac{\Delta\xi}{r}\right)\frac{\mathrm{f}[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}\right\}, \\ \mathrm{m}\mathrm{S}\left\{m\left(\cos\beta+\frac{\Delta\eta}{r}\right)\frac{\mathrm{f}[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}\right\},\quad \mathrm{m}\mathrm{S}\left\{m\left(\cos\gamma+\frac{\Delta\zeta}{r}\right)\frac{\mathrm{f}[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}\right\}, \end{array}\right.$$

tandis que les coefficients de m dans ces produits, savoir,

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{c} \mathrm{S}\left\{m\left(\cos\alpha+\frac{\Delta\xi}{r}\right)\frac{\mathrm{f}[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}\right\}, \\ \mathrm{S}\left\{m\left(\cos\beta+\frac{\Delta\eta}{r}\right)\frac{\mathrm{f}[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}\right\},\quad \mathrm{S}\left\{m\left(\cos\gamma+\frac{\Delta\zeta}{r}\right)\frac{\mathrm{f}[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}\right\}, \end{array}\right.$$

représenteront les projections algébriques de la force accélératrice qui sollicitera la molécule m, et qui sera due aux actions des molécules m, m', etc... D'autre part, si l'on prend x, y, z, t pour variables indépendantes, les projections algébriques de la force accélératrice capable de produire le mouvement observé de la molécule m, pourront être représentées par les expressions

$$\frac{d^2\xi}{dt^2},\qquad \frac{d^2\eta}{dt^2},\qquad \frac{d^2\zeta}{dt^2},$$

puisque ξ, η, ζ, désignent les déplacements très-petits de la molécule m mesurés parallèlement aux axes de x, y, z. Donc, si le mouvement est uniquement dû aux actions moléculaires, on aura

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{d^2\xi}{dt^2}=\mathrm{S}\left\{m\left(\cos\alpha+\frac{\Delta\xi}{r}\right)\frac{\mathrm{f}[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}\right\}, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2}=\mathrm{S}\left\{m\left(\cos\beta+\frac{\Delta\eta}{r}\right)\frac{\mathrm{f}[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}\right\}, \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2}=\mathrm{S}\left\{m\left(\cos\gamma+\frac{\Delta\zeta}{r}\right)\frac{\mathrm{f}[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}\right\}. \end{array}\right.$$

Concevons à présent que, les déplacements ξ, η, ζ et leurs différences finies étant considérées comme des quantités infiniment petites du premier ordre, on néglige, dans les seconds membres des formules (11), les infiniment petits des ordres supérieurs au premier. Alors, comme on aura, en vertu de l'équation (6),

$$\varepsilon = \frac{1}{r}(\cos\alpha\,\Delta\xi + \cos\beta\,\Delta\eta + \cos\gamma\,\Delta\zeta), \tag{12}$$

on ne devra conserver dans le calcul que la première puissance de ε; et, en faisant, pour abréger,

$$f(r) = r\,\mathrm{f}'(r) - \mathrm{f}(r), \tag{13}$$

on trouvera

$$\frac{\mathrm{f}[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon} = \mathrm{f}(r) + \varepsilon f(r). \tag{14}$$

Par suite on tirera des formules (11), réunies aux équations (3),

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= \mathrm{S}\left\{m\,\frac{\mathrm{f}(r)}{r}\,\Delta\xi\right\} + \mathrm{S}[\,m f(r)\,\varepsilon\cos\alpha\,], \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= \mathrm{S}\left\{m\,\frac{\mathrm{f}(r)}{r}\,\Delta\eta\right\} + \mathrm{S}[\,m f(r)\,\varepsilon\cos\beta\,], \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \mathrm{S}\left\{m\,\frac{\mathrm{f}(r)}{r}\,\Delta\zeta\right\} + \mathrm{S}[\,m f(r)\,\varepsilon\cos\gamma\,], \end{aligned}\right. \tag{15}$$

ou, ce qui revient au même

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= \mathrm{S}\left\{m\,\frac{\mathrm{f}(r)+\cos^2\alpha f(r)}{r}\,\Delta\xi\right\} + \mathrm{S}\left\{m\,\frac{\cos\alpha\cos\beta f(r)}{r}\,\Delta\eta\right\} + \mathrm{S}\left\{m\,\frac{\cos\alpha\cos\gamma f(r)}{r}\,\Delta\zeta\right\}, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= \mathrm{S}\left\{m\,\frac{\cos\beta\cos\alpha f(r)}{r}\,\Delta\xi\right\} + \mathrm{S}\left\{m\,\frac{\mathrm{f}(r)+\cos^2\beta f(r)}{r}\,\Delta\eta\right\} + \mathrm{S}\left\{m\,\frac{\cos\beta\cos\gamma f(r)}{r}\,\Delta\gamma\right\}, \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \mathrm{S}\left\{m\,\frac{\cos\gamma\cos\alpha f(r)}{r}\,\Delta\xi\right\} + \mathrm{S}\left\{m\,\frac{\cos\gamma\cos\beta f(r)}{r}\,\Delta\eta\right\} + \mathrm{S}\left\{m\,\frac{\mathrm{f}(r)+\cos^2\gamma f(r)}{r}\,\Delta\zeta\right\}. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Telles sont les équations propres à représenter le mouvement d'un système de molécules qui, étant sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, s'écartent très-peu des positions qu'elles occupaient dans un état d'équilibre du système.

§. 2. *Intégration des équations établies dans le paragraphe précédent.*

Quelles que soient les valeurs générales de ξ, η, ζ propres à vérifier les équations (16) du paragraphe précédent, on pourra toujours les supposer développées en séries d'exponentielles dont les coefficients soient des fonctions linéaires des variables indépendantes x, y, z. En d'autres termes, on pourra représenter ξ, η, ζ par des expressions de la forme

$$(1)\quad \xi=\Sigma\mathfrak{a}e^{(ux+vy+wz)\sqrt{-1}},\quad \eta=\Sigma\mathfrak{b}e^{(ux+vy+wz)\sqrt{-1}},\quad \zeta=\Sigma\mathfrak{c}e^{(ux+vy+wz)\sqrt{-1}},$$

u, v, w désignant des constantes arbitraires, mais réelles, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ des fonctions réelles ou imaginaires de x, y, z, t, convenablement choisies, et le signe Σ indiquant une somme de termes semblables les uns aux autres, mais correspondants à divers systèmes de valeurs des constantes arbitraires u, v, w. Cela posé, soient $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ les parties réelles des fonctions $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, et $-\mathfrak{g}$, $-\mathfrak{h}$, $-\mathfrak{i}$ les coefficients de $\sqrt{-1}$ dans ces mêmes fonctions. Les formules (1) deviendront

$$(2)\quad \begin{cases} \xi=\Sigma(\mathfrak{d}-\mathfrak{g}\sqrt{-1})\,e^{(ux+vy+wz)\sqrt{-1}}, \\ \eta=\Sigma(\mathfrak{e}-\mathfrak{h}\sqrt{-1})\,e^{(ux+vy+wz)\sqrt{-1}}, \\ \zeta=\Sigma(\mathfrak{f}-\mathfrak{i}\sqrt{-1})\,e^{(ux+vy+wz)\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

Comme on aura d'ailleurs

$$(3)\quad e^{(ux+vy+wz)\sqrt{-1}}=\cos(ux+vy+wz)+\sqrt{-1}\sin(ux+vy+wz),$$

on tirera des équations (2), en développant les produits renfermés sous le signe Σ, et supprimant les parties imaginaires dans les valeurs de ξ, η, ζ qui doivent rester réelles,

$$(4)\quad \begin{cases} \xi=\Sigma[\mathfrak{d}\cos(ux+vy+wz)+\mathfrak{g}\sin(ux+vy+wz)], \\ \eta=\Sigma[\mathfrak{e}\cos(ux+vy+wz)+\mathfrak{h}\sin(ux+vy+wz)], \\ \zeta=\Sigma[\mathfrak{f}\cos(ux+vy+wz)+\mathfrak{i}\sin(ux+vy+wz)]. \end{cases}$$

Soient maintenant

$$(5)\quad (u^2+v^2+w^2)^{\frac{1}{2}}=k,$$

et

$$(6) \qquad \frac{u}{k}=a, \quad \frac{v}{k}=b, \quad \frac{w}{k}=c.$$

Les constantes a, b, c vérifieront la formule

$$(7) \qquad a^2+b^2+c^2=1,$$

et représenteront les cosinus des angles formés par une certaine droite OP avec les demi-axes des coordonnées positives. De plus, comme on tirera des équations (6)

$$(8) \qquad u=ka, \quad v=kb, \quad w=kc,$$

et par suite

$$(9) \qquad ux+vy+wz=k(ax+by+cz),$$

il est clair qu'en posant, pour abréger,

$$(10) \qquad v=ax+by+cz,$$

on réduira les équations (4) aux suivantes

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \Sigma(\mathfrak{d}\cos kv+\mathfrak{g}\sin kv), \\ \eta &= \Sigma(\mathfrak{e}\cos kv+\mathfrak{h}\sin kv), \\ \zeta &= \Sigma(\mathfrak{f}\cos kv+\mathfrak{i}\sin kv). \end{aligned} \right.$$

Alors v représentera la distance du point (x, y, z) à un plan $OO'O''$ mené par l'origine et perpendiculaire au demi-axe OP, cette distance étant prise avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant qu'elle se mesurera dans le même sens que le demi-axe OP, ou en sens inverse, à partir du plan $OO'O''$ dont l'équation sera

$$(12) \qquad ax+by+cz=0.$$

Il reste à faire voir comment on pourra trouver les valeurs des coefficients $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{i}$ exprimées en fonctions de la variable t et des constantes arbitraires k, a, b, c. On y parviendra sans peine, à l'aide des considérations suivantes.

Considérons d'abord le cas particulier où chacune des inconnues ξ, η, ζ serait représentée par un seul des termes compris sous le signe Σ dans les formules (11), c'est-à-dire, le cas où l'on aurait

$$(13)\qquad \begin{cases} \xi = \mathfrak{d}\cos kv + \mathfrak{g}\sin kv, \\ \eta = \mathfrak{e}\cos kv + \mathfrak{h}\sin kv, \\ \zeta = \mathfrak{f}\cos kv + \mathfrak{i}\sin kv. \end{cases}$$

Alors, en indiquant par la caractéristique Δ l'accroissement que reçoit une function de x, y, z, quand on fait croitre x de Δx, y de Δy, z de Δz, et par la lettre δ l'angle que forme le rayon r avec le demi-axe OP, on trouvera

$$(14)\qquad \cos\delta = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma;$$

puis on tirera 1.° de l'équation (10), jointe aux formules (4) du §. 1.er,

$$(15)\qquad \Delta v = a\Delta x + b\Delta y + c\Delta v = r\cos\delta,$$

et par suite

$$(16)\qquad \begin{cases} \Delta\cos kv = \cos(kv + k\Delta v) - \cos(kv) \\ \qquad = -[1-\cos(kr\cos\delta)]\cos kv - \sin(kr\cos\delta).\sin kv, \\ \Delta\sin kv = \sin(kv + k\Delta v) - \sin(kv) \\ \qquad = -[1-\cos(kr\cos\delta)]\sin kv + \sin(kr\cos\delta).\cos kv, \end{cases}$$

2.° de la première des équations (13)

$$(17)\qquad \Delta\xi = -(\mathfrak{d}\cos kv + \mathfrak{g}\sin kv)[1-\cos(kr\cos\delta)] + (\mathfrak{g}\cos kv - \mathfrak{d}\sin kv)\sin(kr\cos\delta).$$

Donc, si l'on prend pour variables indépendantes v et t, au lieu de x, y, z, t, on aura simplement

$$(18)\qquad \Delta\xi = -[1-\cos(kr\cos\delta)]\,\xi + \frac{\sin(kr\cos\delta)}{k}\,\frac{d\xi}{dv}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(19)\qquad \begin{cases} \Delta\xi = -2\xi\sin^2\left(\frac{kr\cos\delta}{2}\right) + \frac{\sin(kr\cos\delta)}{k}\,\frac{d\xi}{dv}: \text{ on trouvera de même} \\ \Delta\eta = -2\eta\sin^2\left(\frac{kr\cos\delta}{2}\right) + \frac{\sin(kr\cos\delta)}{k}\,\frac{d\eta}{dv}, \\ \Delta\zeta = -2\zeta\sin^2\left(\frac{kr\cos\delta}{2}\right) + \frac{\sin(kr\cos\delta)}{k}\,\frac{d\zeta}{dv}. \end{cases}$$

En substituant les valeurs précédentes de $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ dans les équations (16) du § 1.er, et faisant, pour abréger,

$$(20)\quad \begin{cases} \mathfrak{L} = \mathrm{S}\left\{\frac{2mf(r)}{r}\sin^2\left(\frac{kr\cos\delta}{2}\right)\right\} + \mathrm{S}\left\{\frac{2mf(r)}{r}\cos^2\alpha\sin^2\left(\frac{kr\cos\delta}{2}\right)\right\}, \\ \mathfrak{M} = \mathrm{S}\left\{\frac{2mf(r)}{r}\sin^2\left(\frac{kr\cos\delta}{2}\right)\right\} + \mathrm{S}\left\{\frac{2mf(r)}{r}\cos^2\beta\sin^2\left(\frac{kr\cos\delta}{2}\right)\right\}, \\ \mathfrak{N} = \mathrm{S}\left\{\frac{2mf(r)}{r}\sin^2\left(\frac{kr\cos\delta}{2}\right)\right\} + \mathrm{S}\left\{\frac{2mf(r)}{r}\cos^2\gamma\sin^2\left(\frac{kr\cos\delta}{2}\right)\right\}; \end{cases}$$

$$(21)\quad \begin{cases} \mathfrak{P} = \mathrm{S}\left\{\frac{2mf(r)}{r}\cos\beta\cos\gamma\sin^2\left(\frac{kr\cos\delta}{2}\right)\right\}, \\ \mathfrak{Q} = \mathrm{S}\left\{\frac{2mf(r)}{r}\cos\gamma\cos\alpha\sin^2\left(\frac{kr\cos\delta}{2}\right)\right\}, \\ \mathfrak{R} = \mathrm{S}\left\{\frac{2mf(r)}{r}\cos\alpha\cos\beta\sin^2\left(\frac{kr\cos\delta}{2}\right)\right\}; \end{cases}$$

$$(22)\quad \begin{cases} \mathfrak{L}' = \mathrm{S}\left\{\frac{mf(r)}{kr}\sin(kr\cos\delta)\right\} + \mathrm{S}\left\{\frac{mf(r)}{kr}\cos^2\alpha\sin(kr\cos\delta)\right\}, \\ \mathfrak{M}' = \mathrm{S}\left\{\frac{mf(r)}{kr}\sin(kr\cos\delta)\right\} + \mathrm{S}\left\{\frac{mf(r)}{kr}\cos^2\beta\sin(kr\cos\delta)\right\}, \\ \mathfrak{N}' = \mathrm{S}\left\{\frac{mf(r)}{kr}\sin(kr\cos\delta)\right\} + \mathrm{S}\left\{\frac{mf(r)}{kr}\cos^2\gamma\sin(kr\cos\delta)\right\}, \end{cases}$$

$$(23)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}' = \mathrm{S}\left\{\frac{mf(r)}{kr}\cos\beta\cos\gamma\sin(kr\cos\delta)\right\}, \\ \mathfrak{Q}' = \mathrm{S}\left\{\frac{mf(r)}{kr}\cos\gamma\cos\alpha\sin(kr\cos\delta)\right\}, \\ \mathfrak{R}' = \mathrm{S}\left\{\frac{mf(r)}{kr}\cos\alpha\cos\beta\sin(kr\cos\delta)\right\}, \end{cases}$$

on en conclura

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= -(\mathcal{L}\xi+\mathcal{R}\eta+\mathcal{Q}\zeta)+\left(\mathcal{L}'\frac{d\xi}{dt}+\mathcal{R}'\frac{d\eta}{dt}+\mathcal{Q}'\frac{d\zeta}{dt}\right),\\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= -(\mathcal{R}\xi+\mathcal{M}\eta+\mathcal{P}\zeta)+\left(\mathcal{R}'\frac{d\xi}{dt}+\mathcal{M}'\frac{d\eta}{dt}+\mathcal{P}'\frac{d\zeta}{dt}\right),\\
\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -(\mathcal{Q}\xi+\mathcal{P}\eta+\mathcal{N}\zeta)+\left(\mathcal{Q}'\frac{d\xi}{dt}+\mathcal{P}'\frac{d\eta}{dt}+\mathcal{N}'\frac{d\zeta}{dt}\right),
\end{aligned}\right.$$

Les équations (24) se simplifient lorsque, dans l'état d'équilibre du système proposé, les masses des molécules m, m', m'', etc...., sont deux à deux égales entre elles, et distribuées symétriquement de part et d'autre d'une molécule quelconque m sur des droites menées par le point avec lequel cette molécule coïncide. En effet, comme la valeur de $\cos\delta$ déterminée par l'équation (14), et par suite les termes dont se composent les sommes indiquées par le signe S dans chacune des formules (22), (23), changent de signe en même temps que les cosinus des trois angles α, β, γ, il est clair que ces termes, comparés deux à deux, seront, dans le cas dont il s'agit, équivalents au signe près, mais affectés de signes contraires. Donc alors les coefficients désignés par $\mathcal{L}'$, $\mathcal{M}'$, $\mathcal{N}'$, $\mathcal{P}'$, $\mathcal{Q}'$, $\mathcal{R}'$ s'évanouiront, et les équations (24) se réduiront à

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= -(\mathcal{L}\xi+\mathcal{R}\eta+\mathcal{Q}\zeta),\\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= -(\mathcal{R}\xi+\mathcal{M}\eta+\mathcal{P}\zeta),\\
\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -(\mathcal{Q}\xi+\mathcal{P}\eta+\mathcal{N}\zeta).
\end{aligned}\right.$$

Les équations (25) fournissent le moyen de déterminer, au bout du temps t, les trois fonctions ξ, η, ζ, ou, ce qui revient au même, les six fonctions $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{i}$, lorsqu'on connaît les valeurs initiales de ces mêmes fonctions et de leurs dérivées prises par rapport à t. En effet représentons par

$$\xi_0,\quad \eta_0,\quad \zeta_0,\quad \mathfrak{d}_0,\quad \mathfrak{e}_0,\quad \mathfrak{f}_0,\quad \mathfrak{g}_0,\quad \mathfrak{h}_0,\quad \mathfrak{i}_0,$$

les valeurs initiales de

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \mathfrak{d},\quad \mathfrak{e},\quad \mathfrak{f},\quad \mathfrak{g},\quad \mathfrak{h},\quad \mathfrak{i},$$

et par

$$\xi_1, \quad \eta_1, \quad \zeta_1, \quad \mathfrak{d}_1, \quad \mathfrak{e}_1, \quad \mathfrak{f}_1, \quad \mathfrak{g}_1, \quad \mathfrak{h}_1, \quad \mathfrak{i}_1,$$

les valeurs initiales de

$$\frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{d\zeta}{dt}, \quad \frac{d\mathfrak{d}}{dt}, \quad \frac{d\mathfrak{e}}{dt}, \quad \frac{d\mathfrak{f}}{dt}, \quad \frac{d\mathfrak{g}}{dt}, \quad \frac{d\mathfrak{h}}{dt}, \quad \frac{d\mathfrak{i}}{dt}.$$

On aura, en vertu des formules (13),

$$(26) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi_0 &= \mathfrak{d}_0 \cos kv + \mathfrak{g}_0 \sin kv, \\ \eta_0 &= \mathfrak{e}_0 \cos kv + \mathfrak{h}_0 \sin kv, \\ \zeta_0 &= \mathfrak{f}_0 \cos kv + \mathfrak{i}_0 \sin kv; \end{aligned} \right.$$

$$(27) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi_1 &= \mathfrak{d}_1 \cos kv + \mathfrak{g}_1 \sin kv, \\ \eta_1 &= \mathfrak{e}_1 \cos kv + \mathfrak{h}_1 \sin kv, \\ \zeta_1 &= \mathfrak{f}_1 \cos kv + \mathfrak{i}_1 \sin kv; \end{aligned} \right.$$

et l'on pourra déduire des équations (25) les valeurs de ξ, η, ζ, relatives à un instant quelconque, en suivant la méthode que nous allons indiquer.

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les cosinus des angles que forme, avec les demi-axes des x y, z positives, une droite OA menée par l'origine, et prolongée dans un certain sens. On aura

$$(28) \qquad \mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2 = 1;$$

et la droite OA sera représentée par la formule

$$(29) \qquad \frac{x}{\mathcal{A}} = \frac{y}{\mathcal{B}} = \frac{z}{\mathcal{C}}.$$

Soit encore

$$(30) \qquad s = \mathcal{A}\xi + \mathcal{B}\eta + \mathcal{C}\zeta.$$

La valeur de s déterminée par la formule (30), représentera le déplacement de la molécule m mesuré parallèlement à la droite OA, et sera positive si ce déplacement se compte dans le même sens que la direction OA, mais négative dans le cas contraire. D'ailleurs, si l'on combine par voie d'addition les formules (25) après avoir

multiplié les deux membres de la première par $\mathcal{A}$, de la seconde par $\mathcal{B}$, de la troisième par $\mathcal{C}$, et si l'on choisit $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ou plutôt le rapport $\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}$, $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}}$, de manière que les trois fractions

(31) $$\frac{\mathcal{L}\mathcal{A}+\mathcal{R}\mathcal{B}+\mathcal{Q}\mathcal{C}}{\mathcal{A}}, \quad \frac{\mathcal{R}\mathcal{A}+\mathcal{M}\mathcal{B}+\mathcal{P}\mathcal{C}}{\mathcal{B}}, \quad \frac{\mathcal{Q}\mathcal{A}+\mathcal{P}\mathcal{B}+\mathcal{N}\mathcal{C}}{\mathcal{C}}$$

deviennent égales entre elles, on trouvera, en désignant par s^2, la valeur commune de ces trois fractions

(32) $$\frac{d^2 8}{dt^2} = -s^2 8,$$

Or il existe trois valeurs de s^2 propres à vérifier la formule

(33) $$\frac{\mathcal{L}\mathcal{A}+\mathcal{R}\mathcal{B}+\mathcal{Q}\mathcal{C}}{\mathcal{A}} = \frac{\mathcal{R}\mathcal{A}+\mathcal{M}\mathcal{B}+\mathcal{P}\mathcal{C}}{\mathcal{B}} = \frac{\mathcal{Q}\mathcal{A}+\mathcal{P}\mathcal{B}+\mathcal{N}\mathcal{C}}{\mathcal{C}} = s^2,$$

et par conséquent les trois équations

(34) $$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{L}-s^2)\mathcal{A}+\mathcal{R}\mathcal{B}+\mathcal{Q}\mathcal{C}=0, \\ \mathcal{R}\mathcal{A}+(\mathcal{M}-s^2)\mathcal{B}+\mathcal{P}\mathcal{C}=0, \\ \mathcal{Q}\mathcal{A}+\mathcal{P}\mathcal{B}+(\mathcal{N}-s^2)\mathcal{C}=0, \end{array} \right.$$

desquelles on tire

(35) $$(\mathcal{L}-s^2)(\mathcal{M}-s^2)(\mathcal{N}-s^2)-\mathcal{P}^2(\mathcal{L}-s^2)-\mathcal{Q}^2(\mathcal{M}-s^2)-\mathcal{R}^2(\mathcal{N}-s^2)+2\mathcal{P}\mathcal{Q}\mathcal{R}=0.$$

De plus à ces trois valeurs de s^2 correspondent trois systèmes de valeurs pour les rapports $\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}$, $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}}$, et par conséquent trois droites OA', OA'', OA''' avec lesquelles on peut faire coïncider successivement la droite OA. Enfin il résulte de la forme des équations (34) que ces trois droites se confondent avec les trois axes de la surface du second degré représentée par l'équation

(36) $$\mathcal{L}x^2+\mathcal{M}y^2+\mathcal{N}z^2+2\mathcal{P}yz+2\mathcal{Q}zx+2\mathcal{R}xy=1,$$

x, y, z désignant de nouvelles coordonnées relatives à de nouveaux axes rectangulaires qui seraient menées par le point O parallèlement aux axes des x, y, z; et l'on peut ajouter que, dans le cas où cette surface est un ellipsoïde, les trois valeurs de s^2 sont précisément les carrés des trois demi-axes. Donc, à l'aide de la formule

(32), on pourra déterminer, au bout du temps t, les trois déplacements de la molécule m mesurés parallèlement aux trois axes de l'ellipsoïde, et par suite à trois droites perpendiculaires entre elles. Si l'on désigne ces trois déplacements par s', s'', s''', et les valeurs correspondantes de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ par

$$\mathfrak{A}',\ \mathfrak{B}',\ \mathfrak{C}';\quad \mathfrak{A}'',\ \mathfrak{B}'',\ \mathfrak{C}'';\quad \mathfrak{A}''',\ \mathfrak{B}''',\ \mathfrak{C}''',$$

on tirera de la formule (30)

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned} s' &= \mathfrak{A}'\xi + \mathfrak{B}'\eta + \mathfrak{C}'\zeta, \\ s'' &= \mathfrak{A}''\xi + \mathfrak{B}''\eta + \mathfrak{C}''\zeta, \\ s''' &= \mathfrak{A}'''\xi + \mathfrak{B}'''\eta + \mathfrak{C}'''\zeta; \end{aligned}\right.$$

et, comme on aura d'ailleurs

$$(38)\ \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{A}'^2+\mathfrak{B}'^2+\mathfrak{C}'^2=1, \quad \mathfrak{A}''^2+\mathfrak{B}''^2+\mathfrak{C}''^2=1, \quad \mathfrak{A}'''^2+\mathfrak{B}'''^2+\mathfrak{C}'''^2=1, \\ &\mathfrak{A}''\mathfrak{A}'''+\mathfrak{B}''\mathfrak{B}'''+\mathfrak{C}''\mathfrak{C}'''=0, \quad \mathfrak{A}'''\mathfrak{A}'+\mathfrak{B}'''\mathfrak{B}'+\mathfrak{C}'''\mathfrak{C}'=0, \quad \mathfrak{A}'\mathfrak{A}''+\mathfrak{B}'\mathfrak{B}''+\mathfrak{C}'\mathfrak{C}''=0 \end{aligned}\right.$$

puisque les trois droites OA', OA'', OA''' se coupent à angles droits, on conclura des formules (37)

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \mathfrak{A}'s' + \mathfrak{A}''s'' + \mathfrak{A}'''s''', \\ \eta &= \mathfrak{B}'s' + \mathfrak{B}''s'' + \mathfrak{B}'''s''', \\ \zeta &= \mathfrak{C}'s' + \mathfrak{C}''s'' + \mathfrak{C}'''s''', \end{aligned}\right.$$

Quant aux valeurs générales de s', s'', s''', on les déduira de l'équation (32) en operant comme il suit.

Soient s_0, s_1 les valeurs initiales de s et de $\dfrac{ds}{dt}$. On aura

$$(40)\qquad s_0 = \mathfrak{A}\xi_0 + \mathfrak{B}\eta_0 + \mathfrak{C}\zeta_0,$$

$$(41)\qquad s_1 = \mathfrak{A}\xi_1 + \mathfrak{B}\eta_1 + \mathfrak{C}\zeta_1,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(42)\qquad s_0 = (\mathfrak{d}_0\mathfrak{A} + \mathfrak{e}_0\mathfrak{B} + \mathfrak{f}_0\mathfrak{C}) \cos kv + (\mathfrak{g}_0\mathfrak{A} + \mathfrak{h}_0\mathfrak{B} + \mathfrak{i}_0\mathfrak{C}) \sin kv,$$

$$(43)\qquad s_1 = (\mathfrak{d}_1\mathfrak{A} + \mathfrak{e}_1\mathfrak{B} + \mathfrak{f}_1\mathfrak{C}) \cos kv + (\mathfrak{g}_1\mathfrak{A} + \mathfrak{h}_1\mathfrak{B} + \mathfrak{i}_1\mathfrak{C}) \sin kv;$$

et l'on tire de l' équation (32)

$$(44) \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 \cos st + \varepsilon_1 \frac{\sin st}{s} = \varepsilon_0 \cos st + \varepsilon_1 \int_0^t \cos st\, dt,$$

ou, en d'autres termes,

$$(45)\ \varepsilon = (\mathfrak{d}_0 \mathcal{A} + \mathfrak{e}_0 \mathcal{B} + \mathfrak{f}_0 \mathcal{C}) \frac{\cos(kv+st)+\cos(kv-st)}{2} + (\mathfrak{g}_0 \mathcal{A} + \mathfrak{h}_0 \mathcal{B} + \mathfrak{i}_0 \mathcal{C}) \frac{\sin(kv+st)+\sin(kv-st)}{2}$$

$$+ \int_0^t \left\{ (\mathfrak{d}_1 \mathcal{A} + \mathfrak{e}_1 \mathcal{B} + \mathfrak{f}_1 \mathcal{C}) \frac{\cos(kv+st)+\cos(kv-st)}{2} + (\mathfrak{g}_1 \mathcal{A}_1 + \mathfrak{h}_1 \mathcal{B} + \mathfrak{i}_1 \mathcal{C}) \frac{\sin(kv+st)+\sin(kv-st)}{2} \right\} dt.$$

Cela posé, faisons pour abréger,

$$(46) \qquad \mathfrak{d}_0 \cos kv + \mathfrak{g}_0 \sin kv = \varphi(v), \quad \mathfrak{e}_0 \cos kv + \mathfrak{h}_0 \sin kv = \chi(v), \quad \mathfrak{f}_0 \cos kv + \mathfrak{i}_0 \sin kv = \psi(v),$$

$$(47) \qquad \mathfrak{d}_1 \cos kv + \mathfrak{g}_1 \sin kv = \Phi(v), \quad \mathfrak{e}_1 \cos kv + \mathfrak{h}_1 \sin kv = X(v), \quad \mathfrak{f}_1 \cos kv + \mathfrak{i}_1 \sin kv = \Psi(v),$$

et

$$(48) \qquad \frac{s}{k} = \Omega.$$

Les fonctions

$$(49) \qquad \varphi(v), \quad \chi(v), \quad \psi(v); \quad \Phi(v), \quad X(v), \quad \Psi(v)$$

représenteront les valeurs initiales de

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta; \quad \frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{d\zeta}{dt},$$

et l'on tirera de l'équation (44), réunie aux formules (42), (43),

$$(50)\ \varepsilon = \mathcal{A} \frac{\varphi(v+\Omega t)+\varphi(v-\Omega t)}{2} + \mathcal{B} \frac{\chi(v+\Omega t)+\chi(v-\Omega t)}{2} + \mathcal{C} \frac{\psi(v+\Omega t)+\psi(v-\Omega t)}{2}$$

$$+ \int_0^t \left\{ \mathcal{A} \frac{\Phi(v+\Omega t)+\Omega(v-\Phi t)}{2} + \mathcal{B} \frac{X(v+\Omega t)+X(v-\Omega t)}{2} + \mathcal{C} \frac{\Psi(v+\Omega t)+\Psi(v-\Omega t)}{2} \right\} dt.$$

Concevons maintenant que, les trois valeurs de s^2 propres à vérifier l'équation (35) étant positives, les valeurs correspondantes et positives de s soient désignées par s', s'', s''', et les valeurs correspondantes de Ω par Ω', Ω'', Ω'''. La formule (50) donnera

$$(51) \qquad \varepsilon' = \mathcal{A}' \frac{\varphi(v+\Omega' t)+\varphi(v-\Omega' t)}{2} + \mathcal{B}' \frac{\chi(v+\Omega' t)+\chi(v-\Omega' t)}{2} + \mathcal{C}' \frac{\psi(v+\Omega' t)+\psi(v-\Omega' t)}{2}$$

$$+ \int_0^t \left\{ \mathcal{A}' \frac{\Phi(v+\Omega' t)+\Phi(v-\Omega' t)}{2} + \mathcal{B}' \frac{X(v+\Omega' t)+X(v-\Omega' t)}{2} + \mathcal{C}' \frac{\Psi(v+\Omega' t)+\Psi(v-\Omega' t)}{2} \right\} dt.$$

$$(52) \qquad \varepsilon'' = \mathcal{A}'' \frac{\varphi(v+\Omega'' t)+\varphi(v-\Omega'' t)}{2} + \mathcal{B}'' \frac{\chi(v+\Omega'' t)+\chi(v-\Omega'' t)}{2} + \mathcal{C}'' \frac{\psi(v+\Omega'' t)+\psi(v-\Omega'' t)}{2}$$

$$+ \int_0^t \mathcal{A}'' \left\{ \frac{\Phi(v+\Omega'' t)+\Phi(v-\Omega'' t)}{2} + \mathcal{B}'' \frac{X(v+\Omega'' t)+X(v-\Omega'' t)}{2} + \mathcal{C}'' \frac{\Psi(v+\Omega'' t)+\Psi(v-\Omega'' t)}{2} \right\} dt.$$

$$(53) \qquad \varepsilon''' = \mathcal{A}''' \frac{\varphi(v+\Omega''' t)+\varphi(v-\Omega''' t)}{2} + \mathcal{B}''' \frac{\chi(v+\Omega''' t)+\chi(v-\Omega''' t)}{2} + \mathcal{C}''' \frac{\psi(v+\Omega''' t)+\psi(v-\Omega''')}{2}$$

$$+ \int_0^t \left\{ \mathcal{A}''' \frac{\Phi(v+\Omega''' t)+\Phi(v+\Omega''' t)}{2} + \mathcal{B}''' \frac{X(v+\Omega''' t)+X(v-\Omega''' t)}{2} + \mathcal{C}''' \frac{\Psi(v+\Omega''' t)+\Psi(v-\Omega''' t)}{2} \right\} dt.$$

En substituant les valeurs précédentes de ε', ε'', ε''' dans les équations (39), on obtiendra pour ξ, η, ζ des fonctions de v et de t qui auront la double propriété de satisfaire, au bout d'un temps quelconque t, aux équations (25), et de vérifier, pour une valeur nulle de t, les conditions

$$(54) \qquad \xi = \varphi(v), \quad \eta = \chi(v), \quad \zeta = \psi(v); \qquad \frac{d\xi}{dt} = \Phi(v), \ \frac{d\eta}{dt} = X(v), \ \frac{d\zeta}{dt} = \Psi(v).$$

Les inconnues ξ, η, ζ et ε', ε'', ε''' ou les déplacements de la molécule m mesurés parallèlement aux axes des x, y, z et à ceux de l'ellipsoïde (36), étant déterminées comme on vient de le dire, on en déduira sans peine la vitesse ω de la molécule m au bout d'un temps quelconque t. En effet, si l'on projette cette vitesse 1.° sur les axes des x, y, z, 2.° sur les axes de l'ellipsoïde (36), on trouvera pour projections algébriques dans le premier cas

$$(55) \qquad \frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{d\zeta}{dt},$$

dans le second cas

$$(56) \qquad \frac{d\varepsilon'}{dt}, \quad \frac{d\varepsilon''}{dt}, \quad \frac{d\varepsilon'''}{dt},$$

et par suite on aura

$$(57)\qquad \omega^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\mathfrak{s}'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{s}''}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{s}'''}{dt}\right)^2.$$

Il est bon d'observer que les équations (51), (52), (53) sont toutes trois comprises dans la formule (50) de laquelle on les déduit en prenant successivement $s = s'$, $s = s''$ $s = s'''$. Si d'ailleurs on pose

$$(58)\qquad \varpi(v) = \mathcal{A}\varphi(v) + \mathcal{B}\chi(v) + \mathcal{C}\psi(v),$$

$$(59)\qquad \Pi(v) = \mathcal{A}\Phi(v) + \mathcal{B}X(v) + \mathcal{C}\Psi(v),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(60)\qquad \varpi(v) = (\mathfrak{d}_0\mathcal{A} + \mathfrak{e}_0\mathcal{B} + \mathfrak{f}_0\mathcal{C}) \cos kv + (\mathfrak{g}_0\mathcal{A} + \mathfrak{h}_0\mathcal{B} + \mathfrak{i}_0\mathcal{C}) \sin kv,$$

$$(61)\qquad \Pi(v) = (\mathfrak{d}_1\mathcal{A} + \mathfrak{e}_1\mathcal{B} + \mathfrak{f}_1\mathcal{C}) \cos kv + (\mathfrak{g}_1\mathcal{A} + \mathfrak{h}_1\mathcal{B} + \mathfrak{i}_1\mathcal{C}) \sin kv,$$

la formule (50) sera réduite à

$$(62)\qquad \mathfrak{s} = \frac{\varpi(v+\Omega t) + \varpi(v-\Omega t)}{2} + \int_0^t \frac{\Pi(v+\Omega t) + \Pi(v-\Omega t)}{2}\, dt.$$

Dans le mouvement que représentent les équations (39) réunies aux formules (51), (52), (53) les déplacements et les vitesses des molécules dépendent des seules variables v et t. Donc, au bout d'un temps quelconque t, ces déplacements et ces vitesses seront les mêmes pour les molécules situées à la même distance v du plan représenté par l'équation (12).

Lorsqu'à l'origine du mouvement, les vitesses et les déplacements des molécules sont parallèles à l'un des trois axes de l'ellipsoïde (36), les fonctions $\varpi(v)$, $\Pi(v)$ déterminées par les formules (60), (61), et l'inconnue $\mathfrak{s}$ déterminée par l'équation (62) s'évanouissent pour deux des valeurs de s représentées par s', s'', s'''; en d'autres termes, deux des déplacements absolus et les vitesses absolues des molécules restent toujours parallèles au même axe de l'ellipsoïde. Si, dans le cas dont il s'agit, celui des déplacements $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}''$, $\mathfrak{s}'''$ qui diffère de zéro étant désigné par $\mathfrak{s}$, les valeurs initiales de $\mathfrak{s}$ et $\frac{d\mathfrak{s}}{dt}$, savoir $\varpi(v)$ et $\Pi(v)$ vérifient la condition

$$(63)\qquad \Pi(v) = \Omega\varpi'(v),$$

la formule (62) donnera

$$(64) \qquad \bar{u} = \varpi(v + \Omega t).$$

Alors la valeur de $\bar{u}$ sera la même pour les molécules situées, au bout du temps t, à la distance v du plan $O'O''O'''$ représenté par l'équation (12), et pour les molécules situées au bout du temps $t + \Delta t$ à la distance $v + \Delta v$, la quantité Δv étant déterminée par la formule

$$(65) \qquad \Delta v = -\Omega \Delta t.$$

Donc le mouvement d'une molécule quelconque m se transmettra immédiatement à d'autres molécules voisines situées du côté des v négatives, et la vitesse avec laquelle le mouvement se propagera dans une direction perpendiculaire au plan $OO'O''$ ou la valeur numérique de $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ fournie par l'équation (20), sera précisément la constante positive Ω. De plus, comme la fonction $\varpi(v)$, déterminée par l'équation (60) reprend la même valeur quand on y fait croître v de $\frac{2\pi}{k}$, il est clair que la fonction $\bar{u} = \varpi(v + \Omega t)$ reprendra la même valeur quand on attribuera l'accroissement $\frac{2\pi}{k}$ à la variable v, ou l'accroissement $\frac{2\pi}{k\Omega}$ à la variable t. Cela posé, faisons

$$(66) \qquad l = \frac{2\pi}{k},$$

et

$$(67) \qquad \mathrm{T} = \frac{2\pi}{k\Omega}.$$

Si, au bout du temps t, on divise l'espace en une infinité de tranches par des plans parallèles les uns aux autres, et correspondants aux valeurs de v qui reproduisent des valeurs données de la fonction $\bar{u}$ et de sa dérivée $\frac{d\bar{u}}{dt}$, la constante l représentera évidemment l'épaisseur de chaque tranche, tandis que la constante T représentera la durée des oscillations isochrones successivement exécutées par une molécule. Nous nommerons ondes planes les tranches dont nous venons de parler, et, pour fixer les idées, nous supposerons ces ondes comprises entre des plans tracés de manière qu'au bout du temps t l'épaisseur de l'une d'elles soit divisée en parties égales par le plan auquel appartient l'équation

(68) $$v = -\Omega t,$$

ou

(69) $$ax + by + cz = -\Omega t.$$

Alors on aura constamment

(70) $$\mathfrak{s} = \varpi(0), \qquad \text{et} \qquad \frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \Omega\varpi'(0),$$

ou, ce qui revient au même,

(71) $$\mathfrak{s} = \mathfrak{d}_0\mathfrak{A} + \mathfrak{e}_0\mathfrak{B} + \mathfrak{f}_0\mathfrak{C} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\mathfrak{s}}{dt} = k\Omega(\mathfrak{g}_0\mathfrak{A} + \mathfrak{h}_0\mathfrak{B} + \mathfrak{i}_0\mathfrak{C})$$

pour tous les points situés dans les plans qui diviseront en parties égales les épaisseurs des différentes ondes, et

(72) $$\mathfrak{s} = \varpi\left(\frac{l}{2}\right), \qquad \frac{d\mathfrak{s}}{dt} = k\Omega\varpi'\left(\frac{l}{2}\right),$$

ou, ce qui revient au même,

(73) $$\mathfrak{s} = -(\mathfrak{d}_0\mathfrak{A} + \mathfrak{e}_0\mathfrak{B} + \mathfrak{f}_0\mathfrak{C}), \quad \frac{d\mathfrak{s}}{dt} = -k\Omega(\mathfrak{g}_0\mathfrak{A} + \mathfrak{h}_0\mathfrak{B} + \mathfrak{i}_0\mathfrak{C})$$

pour les points situés dans les surfaces planes qui sépareront ces mêmes ondes les unes des autres. De plus, la vitesse de propagation d'une onde plane, c'est-à-dire, en d'autres termes, la vitesse de déplacement du plan (68) ou (69), mesurée dans une direction perpendiculaire à ce plan, sera constante en vertu de la formule (68), et représentée par Ω. Comme on aura d'ailleurs, en vertu des formules (66), (67),

(74) $$\Omega T = l,$$

ou

(75) $$\Omega = \frac{l}{T},$$

il est clair que la vitesse Ω sera en raison directe des épaisseurs des ondes, et en raison inverse des durées des oscillations moléculaires. Enfin on tirera des équations (48), (66), (67)

(76) $$k = \frac{2\pi}{l},$$

(77) $$s = k\Omega = \frac{2\pi}{T},$$

et par suite la formule (60), qui détermine s en fonction de k pour une direction donnée du plan $OO'O''$, pourra servir encore à déterminer T ou Ω en fonction de l. Donc il existera généralement une relation entre la vitesse de propagation Ω d'une onde plane et son épaisseur l.

Si la condition (63) était remplacée par la suivante

(78) $$\Pi(v) = -\Omega\varpi'(v),$$

la formule (62) donnerait

(79) $$u = \varpi(v - \Omega t).$$

Alors la valeur de u serait la même pour les molécules situées au bout du temps t à la distance v, et au bout du temps $t + \Delta t$ à la distance $v + \Delta v$ du plan $OO'O''$, la quantité Δv étant déterminée par l'équation

(80) $$\Delta v = \Omega\Delta t.$$

Donc le mouvement d'une molécule quelconque m se transmettrait immédiatement à d'autres molécules voisines situées du côté des v positives, et la vitesse avec laquelle le mouvement se propagerait dans une direction perpendiculaire au plan $OO'O''$, ou la valeur de $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ fournie par l'équation (68) serait toujours la constante positive Ω.

Dans ce cas, on pourrait encore diviser l'espace en une infinité de tranches ou ondes planes égales de même épaisseur, à l'aide des plans parallèles au plan $OO'O''$, et correspondants aux valeurs de v qui reproduisent les valeurs de u et $\frac{du}{dt}$ fournies par les équations (72) et (73). Alors aussi l'épaisseur de l'une des ondes serait divisée en deux parties égales par le plan auquel appartiendrait l'équation

(81) $$v = \Omega t,$$

ou

(82) $$ax + by + cz = \Omega t,$$

et les formules (80) et (71) continueraient de subsister pour tous les points situés dans les plans qui diviseraient en parties égales les épaisseurs des différentes ondes. Enfin l'épaisseur l d'une onde plane, sa vitesse de propagation Ω, et la durée T des oscillations moléculaires vérifieraient toujours les équations (66), (67) qui entraîneraient encore les formules (74), (75), (77).

Si les fonctions $\varpi(\nu)$, $\Pi(\nu)$ ne vérifiaient ni la condition (63), ni la condition (78), le mouvement ne cesserait pas d'être déterminé par les trois formules (51), (52), (53) dont chacune est semblable à la formule (62), et on pourrait le considérer comme produit par la composition de six mouvements pareils à ceux que représentent les équations (64) et (79). Les ondes planes correspondantes aux six mouvements dont il s'agit se propageraient dans l'espace avec des vitesses deux à deux égales entre elles, mais dirigées en sens inverses, et représentées par Ω', Ω'', Ω'''.

Si, au premier instant, les déplacements et les vitesses des molécules, mesurés parallèlement aux axes coordonnés, étaient représentés par des sommes de termes semblables à ceux que renferment les seconds membres des formules (26), (27), en sorte qu'on eût

$$(83)\quad \begin{cases} \xi_0 = \Sigma(\mathfrak{d}_0 \cos k\nu + \mathfrak{g}_0 \sin k\nu), \\ \eta_0 = \Sigma(\mathfrak{e}_0 \cos k\nu + \mathfrak{h}_0 \sin k\nu), \\ \zeta_0 = \Sigma(\mathfrak{f}_0 \cos k\nu + \mathfrak{i}_0 \sin k\nu), \end{cases}$$

$$(84)\quad \begin{cases} \xi_1 = \Sigma(\mathfrak{d}_1 \cos k\nu + \mathfrak{g}_1 \sin k\nu), \\ \eta_1 = \Sigma(\mathfrak{e}_1 \cos k\nu + \mathfrak{h}_1 \sin k\nu), \\ \zeta_1 = \Sigma(\mathfrak{f}_1 \cos k\nu + \mathfrak{i}_1 \sin k\nu); \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(85)\quad \begin{cases} \xi_0 = \Sigma[(\mathfrak{d}_0 \cos(ux+vy+wz) + \mathfrak{g}_0 \sin(ux+vy+wz)], \\ \eta_0 = \Sigma[(\mathfrak{e}_0 \cos(ux+vy+wz) + \mathfrak{h}_0 \sin(ux+vy+wz)], \\ \zeta_0 = \Sigma[(\mathfrak{f}_0 \cos(ux+vy+wz) + \mathfrak{i}_0 \sin(ux+vy+wz)], \end{cases}$$

$$(86)\quad \begin{cases} \xi_1 = \Sigma[(\mathfrak{d}_1 \cos(ux+vy+wz) + \mathfrak{g}_1 \sin(ux+vy+wz)], \\ \eta_1 = \Sigma[(\mathfrak{e}_1 \cos(ux+vy+wz) + \mathfrak{h}_1 \sin(ux+vy+wz)], \\ \zeta_1 = \Sigma[(\mathfrak{f}_1 \cos(ux+vy+wz) + \mathfrak{i}_1 \sin(ux+vy+wz)]; \end{cases}$$

la fonction ν étant toujours déterminée par la formule (10), et le signe Σ indiquant l'addition de plusieurs ou même d'une infinité de termes correspondants à divers systèmes de valeurs des constantes a, b, c, k ou u, v, w; alors, à la place des formules (39), on obtiendrait les suivantes

$$(87)\quad \begin{cases} \xi = \Sigma(\mathcal{A}'\mathfrak{s}' + \mathcal{A}''\mathfrak{s}'' + \mathcal{A}'''\mathfrak{s}'''), \\ \eta = \Sigma(\mathcal{B}'\mathfrak{s}' + \mathcal{B}''\mathfrak{s}'' + \mathcal{B}'''\mathfrak{s}'''), \\ \zeta = \Sigma(\mathcal{C}'\mathfrak{s}' + \mathcal{C}''\mathfrak{s}'' + \mathcal{C}'''\mathfrak{s}'''), \end{cases}$$

les valeurs de ε', ε'', ε''' étant encore celles qui se déduisent des équations (51), (52), (53) jointes aux formules (46), (47). Alors aussi le mouvement du système pourrait être considéré comme produit par la composition de plusieurs ou même d'une infinité de mouvements semblables à ceux que représentent les équations (64) et (76).

Il est bon d'observer que, dans les formules (85), (86), (87), les sommes indiquées par le signe Σ peuvent être composées de termes très-peu différens les uns des autres, et se changer par suite en intégrales définies. Concevons, pour fixer les idées, que l'on remplace le signe Σ par trois signes $\int$ indiquant une intégration triple effectuée par rapport aux quantités u, v, w entre les limites $-\infty$, $+\infty$. Substituons en même temps aux coefficients

$$(88)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{d}_0,\quad \mathfrak{e}_0,\quad \mathfrak{f}_0,\quad \mathfrak{g}_0,\quad \mathfrak{h}_0,\quad \mathfrak{i}_0, \\ \mathfrak{d}_1,\quad \mathfrak{e}_1,\quad \mathfrak{f}_1,\quad \mathfrak{g}_1,\quad \mathfrak{h}_1,\quad \mathfrak{i}_1, \end{array} \right.$$

et aux fonctions

$$(89)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon,\quad \varepsilon',\quad \varepsilon'',\quad \varepsilon''', \\ \varepsilon_0=\varpi(v),\quad \varepsilon_1=\Pi(v), \end{array} \right.$$

des produits de la forme

$$(90)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{D}_0 du\,dv\,dw,\quad \mathfrak{E}_0 du\,dv\,dw,\quad \mathfrak{F}_0 du\,dv\,dw,\quad \mathfrak{G}_0 du\,dv\,dw,\quad \mathfrak{H}_0 du\,dv\,dw,\quad \mathfrak{I}_0 du\,dv\,dw, \\ \mathfrak{D}_1 du\,dv\,dw,\quad \mathfrak{E}_1 du\,dv\,dw,\quad \mathfrak{F}_1 du\,dv\,dw,\quad \mathfrak{G}_1 du\,dv\,dw,\quad \mathfrak{H}_1 du\,dv\,dw,\quad \mathfrak{I}_1 du\,dv\,dw; \end{array} \right.$$

et

$$(91)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \Theta du\,dv\,dw,\qquad \Theta' du\,dv\,dw,\qquad \Theta'' du\,dv\,dw,\qquad \Theta''' du\,dv\,dw, \\ \Theta_0 du\,dv\,dw=\Pi_0(v)du\,dv\,dw,\qquad \Theta_1 du\,dv\,dw=\Pi_1(v)du\,dv\,dw. \end{array} \right.$$

Alors, au lieu des formules (85), (86), on obtiendra les suivantes

$$(92)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \xi_0=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\mathfrak{D}_0\cos(ux+vy+wz)+\mathfrak{G}_0\sin(ux+vy+wz)\right\}du\,dv\,dw, \\ \eta_0=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\mathfrak{E}_0\cos(ux+vy+wz)+\mathfrak{H}_0\sin(ux+vy+wz)\right\}du\,du\,dw, \\ \zeta_0=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\mathfrak{F}_0\cos(ux+vy+wz)+\mathfrak{I}_0\sin(ux+vy+wz)\right\}du\,dv\,dw, \end{array} \right.$$

$$(93)\quad \begin{cases} \xi_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\mathfrak{D}_1 \cos(ux+vy+wz) + \mathfrak{G}_1 \sin(ux+vy+wz)\right\} du\,dv\,dw\,, \\ \eta_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\mathfrak{E}_1 \cos(ux+vy+wz) + \mathfrak{H}_1 \sin(ux+vy+wz)\right\} du\,dv\,dw\,, \\ \zeta_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\mathfrak{F}_1 \cos(ux+vy+wz) + \mathfrak{I}_1 \sin(ux+vy+wz)\right\} du\,dv\,dw\,, \end{cases}$$

dans lesquelles

$$\mathfrak{D}_0,\quad \mathfrak{E}_0,\quad \mathfrak{F}_0,\quad \mathfrak{G}_0,\quad \mathfrak{H}_0,\quad \mathfrak{I}_0;\quad \mathfrak{D}_1,\quad \mathfrak{E}_1,\quad \mathfrak{F}_1,\quad \mathfrak{G}_1,\quad \mathfrak{H}_1,\quad \mathfrak{I}_1$$

pourront être des fonctions quelconques de u, v, w. De plus, les formules (60), (61), (62) donneront

$$(94)\qquad \Pi_0(v) = (\mathfrak{D}_0\mathcal{A} + \mathfrak{E}_0\mathcal{B} + \mathfrak{F}_0\mathcal{C}) \cos kv + (\mathfrak{G}_0\mathcal{A} + \mathfrak{H}_0\mathcal{B} + \mathfrak{I}_0\mathcal{C}) \sin kv,$$

$$(95)\qquad \Pi_1(v) = (\mathfrak{D}_1\mathcal{A} + \mathfrak{E}_1\mathcal{B} + \mathfrak{F}_1\mathcal{C}) \cos kv + (\mathfrak{G}_1\mathcal{A} + \mathfrak{H}_1\mathcal{B} + \mathfrak{I}_1\mathcal{C}) \sin kv,$$

$$(96)\qquad \Theta = \frac{\Pi_0(v+\Omega t) + \Pi_0(v-\Omega t)}{2} + \int_0^t \frac{\Pi_1(v+\Omega t) + (\Pi_1(v-\Omega t)}{2}\, dt,$$

et l'on en déduira les valeurs de Θ', Θ'', Θ''' en attribuant à $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les trois systèmes de valeurs $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$; $\mathcal{A}''$, $\mathcal{B}''$, $\mathcal{C}''$; $\mathcal{A}'''$, $\mathcal{B}'''$, $\mathcal{C}'''$. Cela posé, les valeurs de ξ, η, ζ, précédemment déterminées par les équations (87), deviendront

$$(97)\qquad \begin{cases} \xi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{A}'\Theta' + \mathcal{A}''\Theta'' + \mathcal{A}'''\Theta''')\, du\,dv\,dw, \\ \eta = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{B}'\Theta' + \mathcal{B}''\Theta'' + \mathcal{B}'''\Theta''')\, du\,dv\,dw, \\ \zeta = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{C}'\Theta' + \mathcal{C}''\Theta'' + \mathcal{C}'''\Theta''')\, du\,du\,dw, \end{cases}$$

On peut choisir les coefficients

$$\mathfrak{D}_0,\quad \mathfrak{E}_0,\quad \mathfrak{F}_0,\quad \mathfrak{G}_0,\quad \mathfrak{H}_0,\quad \mathfrak{I}_0;\quad \mathfrak{D}_1,\quad \mathfrak{E}_1,\quad \mathfrak{F}_1,\quad \mathfrak{G}_1,\quad \mathfrak{H}_1,\quad \mathfrak{I}_1,$$

de manière que les valeurs de

$$\xi_0,\quad \eta_0,\quad \zeta_0;\quad \xi_1,\quad \eta_1,\quad \zeta_1,$$

fournies par les équations (92), (93), se réduisent à des fonctions quelconques de x, y, z, savoir, à

$$(98)\qquad \xi_0 = \varphi(x,y,z),\qquad \eta_0 = \chi(x,y,z),\qquad \zeta_0 = \psi(x,y,z),$$

$$(99) \qquad \xi_1 = \Phi(x,y,z), \qquad \eta_1 = X(x,y,z), \qquad \zeta_1 = \Psi(x,y,z).$$

En effet, comme on a généralement, quelle que soit la fonction $f(x,y,z)$,

$$(100) \quad f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiiiiint e^{u(x-\lambda)\sqrt{-1}} e^{v(y-\mu)\sqrt{-1}} e^{w(z-\nu)\sqrt{-1}} f(\lambda,\mu,\nu)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu\, du\, dv\, dw,$$

toutes les intégrations étant effectuées entre les limites $-\infty$, $+\infty$, ou, ce qui revient au même,

$$(101) \quad f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiiiiint \cos[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)] f(\lambda,\mu,\nu)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu\, du\, dv\, dw$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiiiiint \cos(ux+vy+wz)\cos(u\lambda+v\mu+w\nu) f(\lambda,\mu,\nu)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu\, du\, dv\, dw$$

$$+ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiiiiint \sin(ux+vy+wz)\sin(u\lambda+v\mu+w\nu) f(\lambda,\mu,\nu)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu\, du\, dv\, dw,$$

il est clair qu'on fera coïncider les équations (92), (93) avec les formules (95), (96) si l'on prend

$$(102) \begin{cases} \mathfrak{D}_0 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \cos(u\lambda+v\mu+w\nu)\varphi(\lambda,\mu,\nu)\, d\nu\, d\mu\, d\lambda, & \mathfrak{E}_0 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \sin(u\lambda+v\mu+w\nu)\varphi(\lambda,\mu,\nu)\, d\nu\, d\mu\, d\lambda, \\ \mathfrak{C}_0 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \cos(u\lambda+v\mu+w\nu)\chi(\lambda,\mu,\nu)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu, & \mathfrak{H}_0 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \sin(u\lambda+v\mu+w\nu)\chi(\lambda,\mu,\nu)\, d\nu\, d\mu\, d\lambda, \\ \mathfrak{F}_0 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \cos(u\lambda+v\mu+w\nu)\psi(\lambda,\mu,\nu)\, d\nu\, d\mu\, d\lambda, & \mathfrak{I}_0 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \sin(u\lambda+v\mu+w\nu)\psi(\lambda,\mu,\nu)\, d\nu\, d\mu\, d\lambda, \end{cases}$$

$$(103) \begin{cases} \mathfrak{D}_1 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \cos(u\lambda+v\mu+w\nu)\Phi(\lambda,\mu,\nu)\, d\nu\, d\mu\, d\lambda, & \mathfrak{E}_1 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \sin(u\lambda+v\mu+w\nu)\Phi(\lambda,\mu,\nu)\, d\nu\, d\mu\, d\lambda, \\ \mathfrak{C}_1 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \cos(u\lambda+v\mu+w\nu)X(\lambda,\mu,\nu)\, d\nu\, d\mu\, d\lambda, & \mathfrak{H}_1 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \sin(u\lambda+v\mu+w\nu)X(\lambda,\mu,\nu)\, d\nu\, d\mu\, d\lambda, \\ \mathfrak{F}_1 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \cos(u\lambda+v\mu+w\nu)\Psi(\lambda,\mu,\nu)\, d\nu\, d\mu\, d\lambda, & \mathfrak{I}_1 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \sin(u\lambda+v\mu+w\nu)\Psi(\lambda,\mu,\nu)\, d\nu\, d\mu\, d\lambda. \end{cases}$$

En ayant égard à ces dernières formules, on tirera des équations (94) et (95)

$$(104) \quad \Pi_0(\nu) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint [\mathcal{A}\varphi(\lambda,\mu,\nu) + \mathcal{B}\chi(\lambda,\mu,\nu) + \mathcal{C}\psi(\lambda,\mu,\nu)] \cos(k\nu - u\lambda - v\mu - w\nu)\, d\nu\, d\mu\, d\lambda,$$

$$(105) \quad \Pi_1(\nu) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint [\mathcal{A}\Phi(\lambda,\mu,\nu) + \mathcal{B}X(\lambda,\mu,\nu) + \mathcal{C}\Psi(\lambda,\mu,\nu)] \cos(k\nu - u\lambda - v\mu - w\nu)\, d\nu\, d\mu\, d\lambda,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(106)\quad \Pi_0(v)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\!\!\int\!\!\int[\mathcal{A}\varphi(\lambda,\mu,\nu)+\mathcal{B}\chi(\lambda,\mu,\nu)+\mathcal{C}\psi(\lambda,\mu,\nu)]\cos[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\,d\nu\,d\mu\,d\lambda,$$

$$(107)\quad \Pi_1(v)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\!\!\int\!\!\int[\mathcal{A}\Phi(\lambda,\mu,\nu)+\mathcal{B}X(\lambda,\mu,\nu)+\mathcal{C}\Psi(\lambda,\mu,\nu)]\cos[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\,d\nu\,d\mu\,d\lambda.$$

Si, après avoir déduit de l'équation (96), réunie aux équations (106), (107), les valeurs de Θ', Θ'', Θ''', on les substitue dans les formules (97), ces formules représenteront les intégrales générales des équations (15) ou (16) du § 1.er, pourvu que les valeurs de s^2 déterminées par la formule (44) soient réelles, et que, dans l'état d'équilibre du système proposé, les masses m', m'', m'''...... des diverses molécules soient deux à deux égales entre elles, et distribuées symétriquement de part et d'autre d'une molécule quelconque m sur des droites menées par le point avec lequel cette molécule coïncide.

Dans les formules (102), (103) et (104), (105) ou (106), (107), les intégrations relatives aux variables λ, μ, ν doivent être, comme dans l'équation (100), généralement effectuées entre les limites $-\infty$, $+\infty$. Toutefois, si les valeurs initiales des déplacements ξ, η, ζ et des vitesses $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, c'est-à-dire, les fonctions

$$\varphi(x,y,z),\quad \chi(x,y,z),\quad \psi(x,y,z);\quad \Phi(x,y,z),\quad X(x,y,z),\quad \Psi(x,y,z)$$

ne différaient de zéro que pour des valeurs de x, y, z correspondantes aux points situés dans un certain espace, par exemple, aux points renfermés entre deux surfaces courbes, deux surfaces cylindriques et deux surfaces planes représentées par des équations de la forme

$$(108)\qquad z=F_0(x,y),\qquad\qquad z=F_1(x,y),$$

$$(109)\qquad y=f_0(x),\qquad\qquad y=f_1(x),$$

$$(110)\qquad x=x_0,\qquad\qquad x=x_1,$$

on pourrait évidemment, dans les formules dont il s'agit, supposer les intégrales prises entre les limites

$$(111)\qquad \nu=F_0(\lambda,\mu),\qquad\qquad \nu=F_1(\lambda,\mu),$$

$$(112)\qquad \mu=f_0(\lambda),\qquad\qquad \mu=f_1(\lambda),$$

$$(113)\qquad \lambda=x_0,\qquad\qquad \lambda=x_1.$$

· §. 3. *Application des formules précédentes à la théorie de la lumière.*

Supposons que le système de molécules mentionné dans les deux précédens paragraphes soit le fluide éthéré dont les vibrations produisent la sensation de la lumière. Pour déterminer les lois suivant lesquelles de semblables vibrations, d'abord circonscrites dans des limites très resserrées autour d'un certain point O, se propageront à travers ce fluide, il suffit de considérer dans le premier instant un grand nombre d'ondes planes (voyez la page 17) qui se superposent dans le voisinage du point O, et d'admettre que, les plans de ces ondes étant peu inclinés les uns sur les autres, les vibrations des molécules sont assez petites pour rester insensibles dans chaque onde prise séparément, mais deviennent sensibles par la superposition indiquée. Le temps venant à croître, les ondes dont il s'agit viendront successivement se superposer en différens points de l'espace, et l'on nomme *rayon lumineux* la droite qui renferme tous les points de superposition. Toutes fois, pour que ce rayon soit unique, lorsque l'élasticité de l'éther n'est pas la même en tous sens, il est nécessaire que dans chaque onde considérée isolément les vitesses et les déplacements des molécules soient parallèles à l'un des trois axes de l'ellipsoïde représenté par l'équation (36) du § 2. Alors le rayon lumineux sera ce qu'on appelle un *rayon polarisé* parallèlement à cet axe, et, si l'on nomme l l'épaisseur d'une onde plane, Ω sa vitesse de propagation, T la durée des oscillations moléculaires, on aura

$$\Omega T = l. \tag{1}$$

Ajoutons que, si l'on pose

$$k = \frac{2\pi}{l} = \frac{2\pi}{\Omega T}, \tag{2}$$

$$s = k\Omega = \frac{2\pi}{T} \tag{3}$$

les valeurs des $\frac{1}{s^2}$, pour trois rayons polarisés parallèlement aux trois axes de l'ellipsoïde, seront précisément les carrés de ces trois demi-axes. Observons d'ailleurs que, si l'on nomme r le rayon vecteur mené du point O à une molécule voisine m; α, β, γ les angles formés par ce rayon vecteur avec les demi-axes des coordonnées positives; a, b, c les cosinus des angles formés avec ces demi-axes par une droite OP perpendiculaire au plan de l'onde; δ l'angle compris entre cette perpendiculaire et le rayon vecteur r; on aura [voyez l'équation (14) du § 2]

$$\cos\delta = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma, \tag{4}$$

et qu'en faisant pour abréger

(5) $$ka = u,\quad kb = v,\quad kc = w,$$

on tirera de l'équation (4)

(6) $$k\cos\delta = u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma.$$

Cela posé, les coefficients $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ renfermés dans l'équation de l'ellipsoide cidessus mentionné, c'est à dire; dans la formule

(7) $$\mathfrak{L}x^2 + \mathfrak{M}y^2 + \mathfrak{N}z^2 + 2\mathfrak{P}yz + 2\mathfrak{Q}zx + 2\mathfrak{R}xy = 1,$$

se trouveront, en vertu de l'équation (6) jointe aux formules (20), (21) du § 2, déterminés comme il suit,

(8) $$\mathfrak{L} = \mathfrak{V} + \frac{d^2\varphi}{du^2},\quad \mathfrak{M} = \mathfrak{V} + \frac{d^2\varphi}{dv^2},\quad \mathfrak{N} = \mathfrak{V} + \frac{d^2\varphi}{dw^2}$$

(9) $$\mathfrak{P} = \frac{d^2\varphi}{dv\,dw},\quad \mathfrak{Q} = \frac{d^2\varphi}{dw\,du},\quad \mathfrak{R} = \frac{d^2\varphi}{du\,dv}$$

les valeurs de $\mathfrak{V}$ et φ étant

(10) $$\mathfrak{V} = S\left\{\frac{m\,f(r)}{r}\left[1 - \cos(r(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma))\right]\right\}$$

(11) $$\varphi = S\left\{\frac{m\,f(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)^2 + \frac{\cos(r(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma))}{r^2}\right]\right\}$$

Lorsque au premier instant les vitesses et les déplacements des molécules dans une onde plane sont effectivement parallèles a l'un de trois axes de l'ellipsoide représenté par l'équation (7), ces déplacements et ces vitesses restent constamment parallèles au même axe, la lumière se trouve polarisée parallèlement à cet axe, et l'onde plane se propage avec une vitesse constante Ω, sans jamais se subdiviser. Mais il n'en est pas toujours ainsi, et l'on peut concevoir une onde plane dans laquelle au premier instant les vitesses et les déplacements des molécules cesseraient d'être parallèles a l'un des trois axes de l'ellipsoide. En effet, pour composer une onde de cette espèce, il suffit de réunir trois ondes planes tellement choisies que, dans la première, la seconde, et la troisième, la lumière se trouve polarisée parallèlement au premier, au second et au troisième axe de l'ellipsoide, et d'admettre que dans l'onde composée la vitesse ou le déplacement d'une molécule est représentée par la diagonale du parallélépipède, qui aurait pour cotés trois longueurs propres à représenter cette vitesse

ou ce déplacement dans chacune des trois ondes composantes. Alors, le temps venant à croître, l'onde composée se subdivisera en ses trois composantes, qui se propageront à travers le fluide éthéré avec trois vitesses différentes. Ainsi lorsque l'élasticité de l'éther n'est pas la même en tous sens, une onde plane, dans laquelle la lumière n'était point polarisée, se partage généralement en trois ondes planes, dans lesquelles la lumière est polarisée suivant trois directions distinctes; et par suite un rayon de lumière non polarisée se partage en trois rayons de lumière polarisée suivant les trois directions dont il s'agit.

Comme, en laissant les trois cotés d'un parallélépipède dirigés parallèlement à trois axes donnés, on peut toujours tracer ces cotés de manière que la diagonale devienne parallèle à une droite choisie arbitrairement, on doit conclure de ce qui a été dit ci-dessus, que, dans une onde plane de lumière non polarisée, les vitesses et les déplacements des molécules peuvent être parallèles à une droite quelconque.

Les coefficients $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ renfermés dans l'équation (7), et par suite les lois de polarisation de la lumière dans une onde plane dépendent non seulement de la constitution géométrique du fluide éthéré, c. à. d., du mode suivant lequel ses molécules se trouvent distribuées dans l'espace, mais encore de l'épaisseur l de l'onde plane, et de sa direction, c'est à dire, des cosinus a, b, c des angles formés par la perpendiculaire au plan de l'onde avec les demi-axes des coordonnées positives, ou, ce qui revient au même, des trois quantités

$$u = ka, \qquad v = kb, \qquad w = kc.$$

Nous dirons que l'élasticité du fluide éthéré est la même en tous sens autour d'un point quelconque O, si la constitution de ce fluide est telle que l'ellipsoïde (7), qui détermine les lois de polarisation d'une onde plane passant par ce point, conserve une forme invariable, tandis que l'on fait varier la direction du plan de l'onde, et si d'ailleurs la position de cet ellipsoïde est uniquement dépendante de la direction de ce plan. Alors, tandis que l'on fera tourner le plan de l'onde sur lui même, la surface de l'ellipsoïde devra toujours passer par les mêmes points de l'espace et du plan. Donc cet ellipsoïde devra être de révolution autour de la droite perpendiculaire au plan de l'onde; et depuis l'axe de révolution ainsi que le rayon de l'équateur, étant indépendants de la direction du plan de l'onde, demeureront constants, quelles que soient les valeurs attribuées aux trois quantités a, b, c.

Nous dirons que l'élasticité du fluide éthéré est la même en tous sens autour d'un axe quelconque parallèle à un axe donné, par exemple, à l'axe des x, si la forme de l'ellipsoïde (7) dépend uniquement de l'angle compris entre le plan de l'onde et l'axe des x, et si cet ellipsoïde tourne seulement autour de cet axe en même temps que la perpendiculaire au plan de l'onde.

Cela posé, il sera facile d'obtenir les conditions analytiques propres à exprimer que l'élasticité de l'éther est la même en tous sens autour d'un point quelconque,

4 *

ou autour d'un axe quelconque parallèle à l'axe des z. On y parviendra effectivement à l'aide des considerations suivantes.

Outre le système des trois axes coordonnés des x, y, z considérons un second système d'axes rectangulaires des x_1, y_1, z_1 qui pàrtent de la même origine O que les trois premiers. Supposons d'ailleurs que les axes des x_1, y_1, z_1, après avoir d'abord coincidé avec les axes des x, y, z s'en séparent et entraînent dans leur mouvement le plan de l'onde et la droite perpendiculaire à ce plan, ensorte que cette droite passe de la position OP à une nouvelle position OQ, l'épaisseur l de l'onde restant invariable. Le rayon vecteur r, dont la direction n'aura pas changé, formera 1° avec les demi-axes des x, y, z positives les angles α, β, γ, et avec les demi-axes des x_1, y_1, z_1 positives d'autres angles α_1, β_1, γ_1; 2° avec les droites OP et OQ des angles δ, δ_1, déterminés par l'équation (4) et par la suivante

$$\cos\delta_1 = a\cos\alpha_1 + b\cos\beta_1 + c\cos\gamma_1 \tag{12}$$

de laquelle on tirera, en ayant égard aux équations (5),

$$k\cos\delta_1 = u\cos\alpha_1 + v\cos\beta_1 + w\cos\gamma_1. \tag{13}$$

Soient maintenant

$$\mathfrak{L}_1, \quad \mathfrak{M}_1, \quad \mathfrak{N}_1, \quad \mathfrak{P}_1, \quad \mathfrak{Q}_1, \quad \mathfrak{R}_1, \quad \mathfrak{U}_1, \quad \mathfrak{V}_1,$$

ce que deviennent les quantités

$$\mathfrak{L}, \quad \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{Q}, \quad \mathfrak{R}, \quad \mathfrak{U}, \quad \mathfrak{V},$$

déterminées par les équations (8), (9), (10), (11), quand on remplace α, β, γ par α_1, β_1, γ_1, ensorte qu'on ait

$$\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{U}_1 + \frac{d^2\mathfrak{V}_1}{du^2}, \quad \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{U}_1 + \frac{d^2\mathfrak{V}_1}{dv^2}, \quad \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{U}_1 + \frac{d^2\mathfrak{V}_1}{dw^2}, \tag{14}$$

$$\mathfrak{P}_1 = \frac{d^2\mathfrak{V}_1}{dv\,dw}, \quad \mathfrak{Q}_1 = \frac{d^2\mathfrak{V}_1}{dw\,du}, \quad \mathfrak{R}_1 = \frac{d^2\mathfrak{V}_1}{du\,dv} \tag{15}$$

les valeurs de $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{V}_1$ etant

$$\mathfrak{U}_1 = S\left\{\frac{mf(r)}{r}\left[1 - \cos(r(u\cos\alpha_1 + v\cos\beta_1 + w\cos\gamma_1))\right]\right\}, \tag{16}$$

$$\mathfrak{V}_1 = S\left\{\frac{mf(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}(u\cos\alpha_1 + v\cos\beta_1 + w\cos\gamma_1)^2 + \frac{\cos(r(u\cos\alpha_1 + v\cos\beta_1 + w\cos\gamma_1))}{r_2}\right]\right\}. \tag{17}$$

Les deux ellipsoides qui détermineront les lois de la polarisation pour les ondes planes perpendiculaires aux deux droites OP, OQ, seront représentés le premier par l'équation (7), le second par la suivante

$$(18)\qquad \mathcal{L}_1 x_1^2+\mathcal{M}_1 y_1^2+\mathcal{N}_1 z_1^2+2\mathcal{P}_1 y_1 z_1+2\mathcal{Q}_1 z_1 x_1+2\mathcal{R}_1 x_1 y_1=1.$$

De plus le second ellipsoide sera pareil au premier, et placé a l'égard des axes coordonnés des x_1, y_1, z_1 comme le premier l'est à l'egard des axes coordonnées des x, y, z, si l'on a

$$(19)\qquad \mathcal{L}_1=\mathcal{L},\qquad \mathcal{M}_1=\mathcal{M},\qquad \mathcal{N}_1=\mathcal{N},$$

$$(20)\qquad \mathcal{P}_1=\mathcal{P},\qquad \mathcal{Q}_1=\mathcal{Q},\qquad \mathcal{R}_1=\mathcal{R}.$$

Enfin, ces dernières conditions, si elles doivent être verifiées quels que soient u, v, w, pourront être remplacées par les deux suivantes

$$(21)\qquad \mathcal{V}_1=\mathcal{V},\qquad \mathcal{W}_1=\mathcal{W}$$

Effectivement, il suit des équations (8), (9), (14) et (15) que les conditions (19) et (20) peuvent être présentées sous la forme

$$(22)\qquad \mathcal{V}_1-\mathcal{V}+\frac{d^2(\mathcal{W}_1-\mathcal{W})}{du^2}=0,\quad \mathcal{V}_1-\mathcal{V}+\frac{d^2(\mathcal{W}_1-\mathcal{W})}{dv^2}=0,\quad \mathcal{V}_1-\mathcal{V}+\frac{d^2(\mathcal{W}_1-\mathcal{W})}{dw^2}=0,$$

$$(23)\qquad \frac{d^2(\mathcal{W}_1-\mathcal{W})}{dv\,dw}=0,\qquad \frac{d^2(\mathcal{W}_1-\mathcal{W})}{dw\,du}=0,\qquad \frac{d^2(\mathcal{W}_1-\mathcal{W})}{du\,dv}=0.$$

Or les formules (22), (23) seront evidémment verifiées; si l'on a pour des valeurs quelconques de u, v, w

$$\mathcal{V}_1=\mathcal{V},\qquad \mathcal{W}_1=\mathcal{W}.$$

Réciproquement si les conditions (22), et (23) subsistent pour des valeurs quelconques de u, v, w, alors, en vertu des conditions (23), les trois quantités

$$(24)\qquad \frac{d(\mathcal{W}_1-\mathcal{W})}{du},\qquad \frac{d(\mathcal{W}_1-\mathcal{W})}{dv},\qquad \frac{d(\mathcal{W}_1-\mathcal{W})}{dw}$$

et par suite les trois quantités

$$(25)\qquad \frac{d^2(\mathcal{W}_1-\mathcal{W})}{du^2},\qquad \frac{d^2(\mathcal{W}_1-\mathcal{W})}{dv^2},\qquad \frac{d^2(\mathcal{W}_1-\mathcal{W})}{dw^2}$$

seront seulement fonctions la première de u, la seconde de v, la troisième de w. Donc ces trois quantités ne pourront, comme l'exigent les conditions (22), acquérir une valeur commune $\mho - \mho_1$, qu'autant que cette valeur commune sera une quantité constante, c'est à dire, indépendante des trois variables u, v, w, D'ailleurs, lorsqu'on pose $k = 0$, et par suite $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ on tire des équations (10) et (16)

$$\mho = 0, \qquad \mho_1 = 0, \qquad \mho - \mho_1 = 0.$$

Par conséquent, dans l'hypothèse admise, on aura généralement

$$\mho - \mho_1 = 0,$$

ou ce qui revient au même

(26) $$\mho_1 = \mho$$

et les conditions (22) se réduiront

(27) $$\frac{d^2(\varphi_1 - \varphi)}{du^2} = 0, \quad \frac{d^2(\varphi_1 - \varphi)}{dv^2} = 0, \quad \frac{d^2(\varphi_1 - \varphi)}{dw^2} = 0.$$

De ces dernières jointes aux conditions (23) on conclura que les quantités (24) se réduisent à des constantes; et comme, en vertu des formules (11), (17), les expressions

$$\frac{d\varphi}{du}, \quad \frac{d\varphi}{dv}, \quad \frac{d\varphi}{dw}; \qquad \frac{d\varphi_1}{du}, \quad \frac{d\varphi_1}{dv}, \quad \frac{d\varphi_1}{dw}$$

s'évanouiront pour des valeurs nulles de u, v, w, il' est clair, qu'on aura généralement

(28) $$\frac{d(\varphi_1 - \varphi)}{du} = 0, \quad \frac{d(\varphi_1 - \varphi)}{dv} = 0, \quad \frac{d(\varphi_1 - \varphi)}{dw} = 0.$$

Donc la différence

$$\varphi_1 - \varphi$$

se reduira elle même à une constante, qui sera encore nulle, attendu que φ_1 et φ s'évanouissent en même temps que les trois variables u, v, w. On aura donc encore dans l'hypothèse admise

(29) $$\varphi_1 = \varphi$$

et les formules (21), ou (26) et (29), seront alors une conséquence nécessaire des conditions (22) et (23).

Pour que l'elasticité de l'éther puisse être censée rester la même en tous sens autour d'un point quelconque, il est nécessaire et il suffit evidemment que des deux ellipsoides représentés par les équations (7), (18), le second soit toujours pareil au premier et placé à l'egard des axes des x_1, y_1, z_1 comme le premier l'est à l'egard des axes des x, y, z, par conséquent il est nécessaire et il suffit que les conditions (21) soient toujours verifiées c'est-a-dire, que ces conditions subsistent, quelles que soient les valeurs de u, v, w, et quel que soit le nouveau système d'axes rectangulaires des x_1, y_1, z_1.

Si l'on demande les conditions nécessaires pour que l'elasticité de l'éther puisse être censée rester la même en tous sens autour d'un axe quelconque parallèle à l'axe des z, ces conditions ne cesseront pas d'être exprimées par les formules (21), qui devront subsister encore, indépendemment des valeurs attribuées à u, v, w, non plus quels que soient les nouveaux axes des x_1, y_1, z_1, mais seulement quels que soient les nouveaux axes des x_1 et y_1, l'axe des z_1 etant superposé à l'axe des z.

Il nous reste à développer les conditions (21) et à montrer les diverses formules qui s'en déduisent.

Observons d'abord qu'en vertu des équations (10), (11) (16), (17) jointes aux formules (4) et (13), les conditions (21) peuvent s'ecrire comme il suit

$$(30)\qquad S\left\{\frac{m\,f(r)}{r}\left[1-\cos(kr\cos\delta_1)\right]\right\}=S\left\{\frac{m\,f(r)}{r}\left[1-\cos(kr\cos\delta)\right]\right\}$$

$$(31)\qquad S\left\{\frac{mf(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}k^2\cos^2\delta_1+\frac{\cos(kr\cos\delta_1)}{r^2}\right]\right\}=S\left\{\frac{mf(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}k^2\cos^2\delta+\frac{\cos(kr\cos\delta)}{r^2}\right]\right\}$$

Ainsi les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'elasticité de l'éther puisse être censée rester la même en tous sens autour d'un point quelconque ou autour d'un axe quelconque parallèle à l'axe des z se reduisent à ce que les deux quantités

$$(32)\qquad \mathfrak{V}=S\left\{\frac{mf(r)}{r}\left[1-\cos(kr\cos\delta)\right]\right\}$$

$$(33)\qquad \varphi=S\left\{\frac{mf(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}k^2\cos^2\delta+\frac{\cos(kr\cos\delta)}{r^2}\right]\right\}$$

ne changent pas de valeur quand on y remplace l'angle δ compris entre le rayon vecteur r et la droite OP par l'angle δ_1 compris entre le rayon vecteur r

et la droite OQ; les droites OP, OQ pouvant être choisies arbitrairement dans le premier cas, et étant assujetties dans le second à la seule condition de former toutes deux le même angle avec l'axe des z. Observons encore 1° qu'en vertu des équations (5) u, v, w, représentent évidemment les coordonnées d'un point P situé sur la droite OP à la distance k du point O, et vérifient la condition

$$k^2 = u^2 + v^2 + w^2, \tag{34}$$

de laquelle on tire

$$k = \sqrt{(u^2 + v^2 + w^2)}, \tag{35}$$

2° que si l'on nomme u_1, v_1, w_1 les coordonnées d'un point Q situé sur la droite OQ à la distance k du point O, il suffira de substituer la droite OQ à la droite OP pour déduire des formules (6) et (35) les deux suivantes

$$k\cos\delta_1 = u_1\cos\alpha + v_1\cos\beta + w_1\cos\gamma, \tag{36}$$

$$k = \sqrt{(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)}, \tag{37}$$

dans lesquelles on devra remplacer w_1 par w, si les droites OP, OQ forment le même angle avec l'axe des z. Cela posé, les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'élasticité de l'éther puisse être censée rester la même en tous sens autour d'un point quelconque, ou bien autour d'un axe quelconque parallèle à l'axe des z, c'est à dire, les conditions (30) et (31) pourront s'écrire comme il suit

$$(38)\quad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{S}\left\{\frac{m\,\mathrm{f}(r)}{r}\left[1 - \cos\left(r\left(u_1\cos\alpha + v_1\cos\beta + w_1\cos\gamma\right)\right)\right]\right\} \\ & = \mathrm{S}\left\{\frac{m\,\mathrm{f}(r)}{r}\left[1 - \cos\left(r\left(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma\right)\right)\right]\right\} \end{aligned} \right.$$

$$(39)\quad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{S}\left\{\frac{m f(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}\left(u_1\cos\alpha + v_1\cos\beta + w_1\cos\gamma\right)^2 + \frac{\cos\left(r\left(u_1\cos\alpha + v_1\cos\beta + w_1\cos\gamma\right)\right)}{r^2}\right]\right\} \\ & = \mathrm{S}\left\{\frac{m f(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}\left(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma\right)^2 + \frac{\cos\left(r\left(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma\right)\right)}{r^2}\right]\right\} \end{aligned} \right.$$

les quantités variables u_1, v_1, w_1, se trouvant liées avec les quantités u, v, w par l'équation

$$u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 = u^2 + v^2 + w^2, \tag{40}$$

qui, dans le second cas seulement, se partage en deux autres, savoir

$$(41)\qquad u_1^2+v_1^2=u^2+v^2,\qquad w_1=w.$$

On vérifie la formule (40) en supposant

$$(42)\qquad v_1=0\qquad w_1=0,\qquad u_1=\pm\sqrt{(u^2+v^2+w^2)}=\pm k.$$

En vertu de cette supposition, les formules (38) et (39) deviennent

$$(43)\qquad \mathrm{S}\left\{\frac{m\,\mathrm{f}(r)}{r}[1-\cos(r(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma))]\right\}=\mathrm{S}\left\{\frac{m\,\mathrm{f}(r)}{r}[1-\cos(kr\cos\alpha)]\right\},$$

$$(44)\qquad \left\{\begin{aligned}&\mathrm{S}\left\{\frac{mf(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^2+\frac{\cos(r(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma))}{r^2}\right]\right\}\\ &=\mathrm{S}\left\{\frac{mf(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}k^2\cos^2\alpha+\frac{\cos(kr\cos\alpha)}{r^2}\right]\right\}.\end{aligned}\right.$$

Réciproquement, si ces dernières subsistent, quelles que soient les valeurs de u, v, w, leurs premiers membres ne seront point altérés, quand on y remplacera les quantités u, v, w par d'autres quantités u_1, v_1, w_1, propres à vérifier l'équation

$$u_1^2+v_1^2+w_1^2=k^2=u^2+v^2+w^2.$$

Donc les équations (43), (44), déduites des formules (38), (39), entraîneront à leur tour ces formules, auxquelles on pourra les substituer sans inconvénient. D'autre part, comme on aura généralement

$$\cos(r(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma))=1-\frac{r^2}{1.2}(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^2+\frac{r^4}{1.2.3.4}(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^4$$
$$-\text{ etc.}$$

$$\cos(kr\cos\alpha)=1-\frac{r^2}{1.2}k^2\cos^2\alpha+\frac{r^4}{1.2.3.4}k^4\cos^4\alpha-\text{etc.}$$

$$=1-\frac{r^2}{1.2}(u^2+v^2+w^2)\cos^2\alpha+\frac{r^4}{1.2.3.4}(u^2+v^2+w^2)^2\cos^4\alpha-\text{etc.},$$

il suffira d'égaler entre eux les termes qui, dans les deux membres des équations (43) et (44), représenteront des fonctions homogènes de u, v, w du degré $2n$ pour obtenir les formules

$$(45)\qquad \mathrm{S}\left\{mr^{2n-1}(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^{2n}\,\mathrm{f}(r)\right\}=k^{2n}\,\mathrm{S}\left\{mr^{2n-1}\cos^{2n}\alpha\,\mathrm{f}(r)\right\},$$

et

$$(46)\qquad \mathrm{S}\left\{mr^{2n-3}(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^{2n}f(r)\right\}=k^{2n}\,\mathrm{S}\left\{mr^{2n-3}\cos^{2n}\alpha f(r)\right\},$$

dont la première devra être etendue à toutes les valeurs positives du nombre entier n, et la seconde à toutes les valeurs de n qui surpassent l'unité. Enfin, comme les deux expressions

$$(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^{2n},\qquad k^{2n}(u^2+v^2+w^2)^n,$$

étant développées, fournissent la première des termes de la forme

$$\frac{1.2.3\ldots.2n}{(1.2\ldots\lambda)(1.2\ldots\mu)(1.2\ldots\nu)}u^{\lambda}v^{\mu}w^{\nu}\cos^{\lambda}\alpha\cos^{\mu}\beta\cos^{\nu}\gamma$$

dans lesquels les exposants λ, μ, ν liés entre eux par l'équation

$$(47)\qquad \lambda+\mu+\nu=2n$$

peuvent être pairs ou impairs, et la seconde des termes de la forme

$$\frac{1.2.3\ldots n}{\left(1.2\ldots\frac{\lambda}{2}\right)\left(1.2\ldots\frac{\mu}{2}\right)\left(1.2\ldots\frac{\nu}{2}\right)}u^{\lambda}v^{\mu}w^{\nu}=\frac{2.4.6\ldots.2n}{(2.4\ldots\lambda)(2.4\ldots\mu)(2.4\ldots\nu)}u^{\lambda}v^{\mu}w^{\nu}$$

$$=\frac{1.3..(\lambda-1).1.3\ldots(\mu-1).1.3\ldots(\nu-1)}{1.3.5\ldots.(2n-1)}\,\frac{1.2.3\ldots2n}{(1.2..\lambda)(1.2\ldots\mu)(1.2\ldots\nu)}u^{\lambda}v^{\mu}w^{\nu}$$

dans lesquels les exposants λ, μ, ν, sont toujours pairs; comme d'ailleurs les formules (45) et (46) doivent subsister indépendamment des valeurs attribuées à u, v, w et offrir chacune dans le premier et dans le second membre les mêmes puissances de u, v, w multipliées par les mêmes coefficients, on tirera de ces formules 1° pour des valeurs impaires de λ, de μ, ou de ν

$$(48)\qquad \mathrm{S}\left\{mr^{2n-1}\,\mathrm{f}(r)\cos^{\lambda}\alpha\cos^{\mu}\beta\cos^{\nu}\gamma\right\}=0$$

et

$$(49)\qquad \mathrm{S}\left\{mr^{2n-3}f(r)\cos^{\lambda}\alpha\cos^{\mu}\beta\cos^{\nu}\gamma\right\}=0$$

2° pour des valeurspaires de λ, μ et ν

$$(50)\quad S\left\{mr^{2n-1}f(r)\cos^{\lambda}\alpha\cos^{\mu}\beta\cos^{\nu}\gamma\right\}=\frac{1.3...(\lambda-1).1.3...(\mu-1).1.3...(\nu-1)}{1\,.\,3\,.\,5\,...\,(2n-1)}S\left\{mr^{2n-1}f(r)\cos^{2n}\alpha\right\},$$

et

$$(51)\quad S\left\{mr^{2n-3}f(r)\cos^{\lambda}\alpha\cos^{\mu}\beta\cos^{\nu}\gamma\right\}=\frac{1.3...(\lambda-1).1.3...(\mu-1)1.3...(\nu-1)}{1\,.\,3\,.\,5\,...\,(2n-1)}S\left\{mr^{2n-3}f(r)\cos^{2n}\alpha\right\},$$

le nombre n dont le double équivaut à la somme $\lambda+\mu+\nu$ pouvant être quelconque dans les équations (48), (50), mais devant surpasser l'unité dans les équations (49), (51). Ainsi en particulier, l'on conclura des formules (48), (49), en posant $n=1$,

$$S\{mr\,f(r)\cos\beta\cos\gamma\}=S\{mr\,f(r)\cos\gamma\cos\alpha\}=S\{mr\,f(r)\cos\alpha\cos\beta\}=0$$

$$S\{mr\,f(r)\cos^2\alpha\}=S\{mr\,f(r)\cos^2\beta\}=S\{mr\,f(r)\cos^2\gamma\};$$

et des formules (49), (51), en posant $n=2$,

$$S\{mrf(r)\cos\beta\cos^3\gamma\}=S\{mrf(r)\cos\gamma\cos^3\alpha\}=S\{mrf(r)\cos\alpha\cos^3\beta\}$$

$$=S\{mrf(r)\cos^3\beta\cos\gamma\}=S\{mrf(r)\cos^3\gamma\cos\alpha\}=S\{mrf(r)\cos^3\alpha\cos\beta\}=0,$$

$$S\{mrf(r)\cos^2\beta\cos^2\gamma\}=S\{mrf(r)\cos^2\gamma\cos^2\alpha\}=S\{mrf(r)\cos^2\alpha\cos^2\beta\}$$

$$=\tfrac{1}{3}S\{mrf(r)\cos^4\alpha\}=\tfrac{1}{3}S\{mrf(r)\cos^4\beta\}=S\{mrf(r)\cos^4\beta\}$$

Ajoutons que des formules (48), (49), (50), (51) on peut remonter immédiatement aux formules (41), (46), par conséquent aux formules (43) (44), ainsi qu'aux formules (38), (39). Donc en définitive les formules (48), (49), (50), et (51), etendues à toutes les valeurs positives du nombre entier n, ou du moins, s'il s'agit des formules (49) et (51), aux valeurs entières de n qui surpassent l'unité, expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'élasticité de l'éther puisse être censée rester la même en tous sens autour d'un point quelconque.

Lorsque ces conditions sont remplies, on tire des équations (10) et (11) jointes aux formules (43) et (44)

$$(52)\qquad \mathfrak{V}=S\left\{\frac{m\,f(r)}{r}\left[1-\cos(kr\cos\alpha)\right]\right\},$$

$$(53)\qquad \mathfrak{P}=S\left\{\frac{mf(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}k^2\cos^2\alpha+\frac{\cos(kr\cos\alpha)}{r^2}\right]\right\},$$

D'aûtre part, si, après avoir fait, pour abréger,

(54) $$K = \tfrac{1}{2}k^2 = \frac{u^2+v^2+w^2}{2},$$

on désigne par

(55) $$\varphi' = \frac{d\varphi}{dK}, \qquad \varphi'' = \frac{d^2\varphi}{dK^2}$$

les derivées du premier et du second ordre de φ consideré comme fonction de K, on trouvera

$$\frac{dK}{du} = u, \qquad \frac{dK}{dv} = v, \qquad \frac{dK}{dw} = w,$$

et par suite

$$\frac{d\varphi}{du} = u\varphi', \qquad \frac{d\varphi}{dv} = v\varphi', \qquad \frac{d\varphi}{dw} = w\varphi',$$

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} = \varphi' + u^2\varphi'', \qquad \frac{d^2\varphi}{dv^2} = \varphi' + v^2\varphi'', \qquad \frac{d^2\varphi}{dw^2} = \varphi' + w^2\varphi'',$$

$$\frac{d^2\varphi}{dvdw} = vw\varphi'', \qquad \frac{d^2\varphi}{dwdu} = wu\varphi'', \qquad \frac{d\varphi^2}{dudv} = uv\varphi'',$$

En conséquence les formules (8), (9) donneront

(56) $$\mathcal{L} = \mathcal{D} + \varphi' + u^2\varphi'', \quad \mathcal{M} = \mathcal{D} + \varphi' + v^2\varphi'', \quad \mathcal{N} = \mathcal{D} + \varphi' + w^2\varphi''$$

(57) $$\mathcal{P} = vw\varphi', \qquad \mathcal{Q} = wu\varphi'', \qquad \mathcal{R} = uv\varphi''$$

et l'équation (7), c'est-à-dire l'équation de l'ellipsoide qui détermine les loix de la polarisation deviendra

(58) $$\varphi''(ux+vy+wz)^2 + (\mathcal{D}+\varphi')(x^2+y^2+z^2) = 1$$

Pour reconnaitre plus aisément la forme de cet ellipsoide concevons que l'on fasse coincider l'axe des z avec la droite OP perpendiculaire au plan de l'onde. Comme on aura dans cette hypothèse

$$u = 0, \qquad v = 0,$$

la formule (34) donnera

$$w = \pm k,$$

et la formule (58) sera réduite à

(59) $$k^2 \varphi'' z^2 + (\upsilon + \varphi')(x^2 + y^2 + z^2) = 1.$$

D'ailleurs, en vertu de ce qui a été dit plus haut [page 15] les valeurs de υ, φ et par suite celles de φ', φ'' ne varieront pas dans le passage de l'équation (58) à l'équation (59). Maintenant il est clair que l'ellipsoïde représenté par l'équation (59) sera de révolution autour de l'axe des z, et que dans cet ellipsoïde le carré du rayon de l'équateur sera egal au rapport

(60) $$\frac{1}{\upsilon + \varphi'},$$

le carré du demi-axe de révolution étant

(61) $$\frac{1}{\upsilon + \varphi' + k^2 \varphi''}.$$

Au reste la discussion de l'équation (58) conduirait immédiatement aux mêmes conditions. Ainsi, comme nous l'avions prévu [page 7], lorsque l'élasticité de l'éther est la même en tous sens autour d'un point quelconque, l'ellipsoïde qui détermine les loix de polarisation d'une onde plane est de révolution autour de la droite perpendiculaire au plan de l'onde; et dans cet ellipsoïde l'axe de révolution et le rayon de l'équateur ne dépendent pas des quantités a, b, c, mais seulement de la quantité k renfermée dans les valeurs de υ, φ que fournissent les équations (52) et (53). Ajoutons 1° que les formules (53) et (55) jointes à l'équation (54) donneront

(62) $$\varphi' = \frac{1}{k}\frac{d\varphi}{dk} = \mathrm{S}\left\{\frac{mf(r)\cos^2\alpha}{r}\left[1 - \frac{\sin(kr\cos\alpha)}{kr\cos\alpha}\right]\right\},$$

(63) $$\varphi'' = \frac{1}{k}\frac{d\varphi'}{dk} = \frac{1}{k^2}\,\mathrm{S}\left\{\frac{mf(r)\cos^2\alpha}{r}\left[\frac{\sin(kr\cos\alpha)}{kr\cos\alpha} - \cos(kr\cos\alpha)\right]\right\},$$

2° qu'en développant suivant les puissances ascendantes de k les derniers membres des formules (52), (62) et (63) on en tirera

$$(64) \qquad \mho = k^2\,\mathrm{S}\,\frac{mr\,\mathrm{f}(r)\cos^2\alpha}{1\,.\,2} - k^4\,\mathrm{S}\,\frac{mr^3\,\mathrm{f}(r)\cos^4\alpha}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + k^6\,\mathrm{S}\,\frac{mr^5\,\mathrm{f}(r)\cos^6\alpha}{1.2.3.4.5.6} - \text{etc.}$$

$$(65) \qquad \mathcal{V}' = k^2\,\mathrm{S}\,\frac{mr f(r)\cos^4\alpha}{1\,.\,2\,.\,3} - k^4\,\mathrm{S}\,\frac{mr^3 f(r)\cos^6\alpha}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} + k^6\,\mathrm{S}\,\frac{mr^5 f(r)\cos^8\alpha}{1.2.3.4.5.6.7} - \text{etc.}$$

$$(66) \qquad k^2\mathcal{V}'' = 2k^2\,\mathrm{S}\,\frac{mr f(r)\cos^4\alpha}{1\,.\,2\,.\,3} - 4k^4\,\mathrm{S}\,\frac{mr^3 f(r)\cos^6\alpha}{1.2.3.4.5.6} + 6k^6\,\mathrm{S}\,\frac{mr^5 f(r)\cos^8\alpha}{1.2.3.4.5.6.7} - \text{etc.}$$

Chacune des series comprises dans les trois formules qui précédent offre, pour coefficients des puissances paires et ascendantes de k, des sommes dans lesquelles la fonction $\mathrm{f}(r)$ ou $f(r)$ se trouve successivement multipliée par

$$r, \qquad r^3, \qquad r^5, \qquad \text{etc.}$$

D'ailleurs l'action moléculaire, par conséquent les fonctions $\mathrm{f}(r), f(r)$ ne conservent de valeurs sensibles que pour de très petites valeurs de r; et comme d'autre part, r étant une quantité très petite du premier ordre, $r^3, r^5, \ldots$ seront des quantités très petites du troisième, du cinquième ordre, il est clair que dans les séries en question, les coefficients des puissances successives de k doivent décroître très rapidement. Si l'on réduit ces mêmes séries à leurs premiers termes, on obtiendra seulement des valeurs approchées de

$$\mho, \qquad \mathcal{V}', \qquad k^2\mathcal{V}'',$$

et alors, en faisant pour obrégér

$$(67) \qquad \mathrm{S}\,\frac{mr\,\mathrm{f}(r)\cos^2\alpha}{1\,.\,2} = I, \qquad \mathrm{S}\,\frac{mr f(r)\cos^4\alpha}{1\,.\,2\,.\,3} = R,$$

on trouvera

$$(68) \qquad \mho = k^2 I, \qquad \mathcal{V}' = k^2 R, \qquad k^2\mathcal{V}'' = 2k^2 R$$

En vertu des formules (5) et (68), les équations (56) (57) se réduisent à

$$(69) \qquad \mathcal{L} = (2Ra^2 + R + I)k^2, \quad \mathcal{M} = (2Rb^2 + R + I)k^2, \quad \mathcal{N} = (2Rc^2 + R + I)k^2,$$

$$(70) \qquad \mathcal{P} = 2Rbck^2, \qquad \mathcal{Q} = 2Rcak^2, \qquad \mathcal{R} = 2Rabk^2.$$

On aura d'ailleurs, en vertu des formules (50) et (51) jointes aux équations (67),

$$(71) \qquad I = \mathrm{S}\,\frac{mr\,\mathrm{f}(r)\cos^2\alpha}{1\,.\,2} = \mathrm{S}\,\frac{mr\,\mathrm{f}(r)\cos^2\beta}{1\,.\,2} = \mathrm{S}\,\frac{mr\,\mathrm{f}(r)\cos^2\gamma}{1\,.\,2},$$

$$(72) \qquad R = S\frac{mrf(r)\cos^4\alpha}{1.2.3} = S\frac{mrf(r)\cos^4\beta}{1.2.3} = S\frac{mrf(r)\cos^4\gamma}{1.2.3}$$

$$= S\frac{mrf(r)\cos^2\beta\cos^2\gamma}{1.2} = S\frac{mrf(r)\cos^2\gamma\cos^2\alpha}{1.2} = S\frac{mrf(r)\cos^2\alpha\cos^2\beta}{1.2};$$

et par conséquent les coefficients représentés ici par les lettres I et R ne differeront pas de ceux que déterminent les formules (37), (39) de la page 199 du 3ᵉ volume des *exercies des mathématiques.* Cela posé, il suffira évidemment de diviser par k^2 les valeurs précédentes de

$$\mathfrak{L},\ \mathfrak{M},\ \mathfrak{N},\ \mathfrak{P},\ \mathfrak{Q},\ \mathfrak{R}$$

pour obtenir, comme on devait s'y attendre, celles que fournissent les équations (45), (46) de la page 27 du 5ᵉ volume.

Si nous désignons, comme nous l'avons fait cidessus [§ 2], par s', s'', s''' les trois valeurs de s correspondantes aux trois rayons polarisés dans lesquels se divise généralement un rayon quelconque,

$$(73) \qquad \frac{1}{s'^2},\quad \frac{1}{s''^2},\quad \frac{1}{s'''^2}$$

seront les carrés des trois demi-axes de l'ellipsoide qui détermine les loix de la polarisation. Donc, lorsque cet ellipsoide, étant de révolution, se trouve représenté par l'équation (58), ou ce qui revient au même par l'équation (59), deux des rapports (73) sont egaux à l'expression (60), et le troisième à l'expression (61), ensorte qu'on peut prendre

$$(74) \qquad s'^2 = s''^2 = \mathfrak{V} + \mathfrak{P}',$$

$$(75) \qquad s'''^2 = \mathfrak{V} + \mathfrak{P}' + k^2\mathfrak{P}''.$$

Alors aussi, en vertu des équations (3), (74), et (75), les trois quantités

$$\Omega',\ \Omega'',\ \Omega''',$$

c'est à dire, les trois vitesses de propagation des trois ondes planes dans lesquelles se divise généralement une onde primitive de lumière non polarisée, se réduisent à celles que déterminent les formules

$$(76) \qquad \Omega'^2 = \Omega''^2 = \frac{\mathfrak{V} + \mathfrak{P}'}{k^2},$$

$$(77) \qquad \Omega'''^2 = \frac{\mho + \wp'}{k^2} + \wp''.$$

Par suite, des trois ondes planes dont il s'agit les deux premières, se propageant avec la même vitesse, se superposeront de manière à n'en plus former qu'une seule, dans laquelle la lumière sera polarisée parallèlement au plan de l'équateur de l'ellipsoïde représenté par l'équation (58), ou, ce qui revient au même, parallèlement au plan de l'onde primitive, tandis que dans la troisième la lumière sera polarisée perpendiculairement à ce plan. Cela posé, la troisième onde disparaîtra si les déplacements et les vitesses des molécules éthérées dans le premier instant sont parallèles au plan de l'onde lumineuse, et alors il n'y aura plus de polarisation. Au reste, pour que la polarisation de la lumière devienne tout a fait insensible dans les milieux dont l'élasticité est la même en tous sens, il n'est pas absolument nécessaire, que la troisième onde disparaisse, et il suffit comme un jeune géomètre M. Blanchet en a fait la rémarque, que le rayon correspondant à cette troisième onde soit du nombre de ceux qui échappent au sens de la vue. On concoit en effet, qu'en raison de la trop grande ou trop courte durée des oscillations de l'éther l'oeil peut cesser de percevoir certains rayons, de même qu'en raison de la trop grande ou trop courte durée des oscillations des molécules aériennes l'oreille cesse de percevoir des sons trop graves ou trop aigus, et l'on pourrait encore supposer l'oeil organisé de manière à percevoir les vibrations des molécules éthérées, quand elles sont dirigées dans les plans des ondes lumineuses, mais non lorsqu'elles deviennent perpendiculaires à ces mêmes plans. Quoiqu'il en soit, en faisant abstraction de la troisième onde, designant par T la durée des oscillations des molécules éthérées et posant [voyez la formule (3)]

$$s = \frac{2\pi}{T},$$

on aura, en vertu de la formule (74),

$$(78) \qquad s^2 = \mho + \wp',$$

ou ce qui revient au même, eu égard aux formules (52) et (62),

$$(79) \qquad s^2 = S\left\{\frac{m\,\mathrm{f}(r)}{r}[1-\cos(kr\cos\alpha)]\right\} + S\left\{\frac{mf(r)\cos^2\alpha}{r}\left[1-\frac{\sin(kr\cos\alpha)}{kr\cos\alpha}\right]\right\};$$

ou bien encore, eu égard aux formules (64) et (65),

$$(80) \quad s^2 = k^2 S\left\{\frac{mr\cos^2\alpha}{1\,.\,2}[\mathrm{f}(r)+\tfrac{1}{3}f(r)\cos^2\alpha]\right\} - k^4 S\left\{\frac{mr^3\cos^4\alpha}{1.2.3.4}[\mathrm{f}(r)+\tfrac{1}{5}f(r)\cos^2\alpha]\right\}$$

$$+ k^6 S\left\{\frac{mr^5\cos^6\alpha}{1.2.3.4.5.6}[\mathrm{f}(r)+\tfrac{1}{7}f(r)\cos^2\alpha]\right\} - \text{etc.}$$

Telle est l'équation qui, dans un milieu dont l'élasticité reste la même en tous sens, lie entre elles les deux quantités

$$s = \frac{2\pi}{T} \quad \text{et} \quad k = \frac{2\pi}{l},$$

par conséquent les deux quantités T et l, c'est-à-dire la durée des oscillations moléculaires du fluide éthéré, et l'épaisseur d'une onde plane.

Lorsque dans les équations (74), (75), (76), (77) on substitue à υ, φ', φ'' leurs valeurs approchées tirées des formules (68), on trouve

(81) $$s'^2 = s''^2 = k^2 (R + I),$$

(82) $$s'''^2 = k^2 (3R + I),$$

(83) $$\Omega'^2 = \Omega''^2 = R + I,$$

(84) $$\Omega'''^2 = 3R + I.$$

Il suit des deux dernières que, dans un milieu dont l'élasticité reste la même en tous sens, les vitesses de propagation des ondes planes correspondantes au rayon visible et au rayon invisible ont respectivement pour valeurs approchées

(85) $$(R + I)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad (3R + I)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui s'accorde avec les resultats obtenus dans le troisième volume des Exercices [page 41].

Passons maintenant au cas où l'élasticité de l'éther reste la même en tous sens non plus autour d'un point quelconque, mais seulement autour d'un axe quelconque parallèle à l'axe des z. Alors les conditions (38), (39) devront être remplies seulement pour les valeurs de u_1, v_1, w_1 propres à vérifier les formules (41). D'ailleurs on vérifiera ces formules en supposant

(86) $$v_1 = 0, \qquad w_1 = w, \qquad u_1 = \pm \sqrt{(u^2 + v^2)} = \pm \sqrt{(k^2 - w^2)};$$

et en vertu de cette supposition les conditions (38), (39) deviendront

(87) $$\left\{ \begin{aligned} & S\left\{\frac{m\,f(r)}{r}[1 - \cos(r(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma))]\right\} \\ = {} & S\left\{\frac{m\,f(r)}{r}[1 - \cos(r(\pm(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha + v\cos\gamma))]\right\}, \end{aligned} \right.$$

$$(88)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{S}\left\{\frac{mf(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^2+\frac{\cos(r(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma))}{r^2}\right]\right\} \\ =\,&\mathrm{S}\left\{\frac{mf(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}(\pm(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+w\cos\gamma)^2+\frac{\cos(r(\pm(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+w\cos\gamma))}{r^2}\right]\right\},\end{aligned}\right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(89)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{S}\left\{\frac{m\,\mathrm{f}(r)}{r}[1-\cos(r(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma))]\right\} \\ =\,&\mathrm{S}\left\{\frac{m\,\mathrm{f}(r)}{r}[1-\cos(r(\pm(k^2-w^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+w\cos\gamma))]\right\},\end{aligned}\right.$$

$$(90)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{S}\left\{\frac{mf(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^2+\frac{\cos(r(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma))}{r^2}\right]\right\} \\ =\,&\mathrm{S}\left\{\frac{mf(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}(\pm(k^2-w^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+w\cos\gamma)^2+\frac{\cos(r(\pm(k^2-w^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+w\cos\gamma))}{r^2}\right]\right\},\end{aligned}\right.$$

le double signe $\pm$ pouvant être réduit arbitrairement soit au signe $+$ soit au signe $-$. Réciproquement, si les équations (89), (90) continuent de subsister, tandis que u, v, varient mais de manière a vérifier toujours la formule (34) ou

$$u^2+v^2=k^2-w^2,$$

elles ne seront point altérées quand on remplacera dans leurs prémiers membres les quantités u, v par d'autres quantités u_1, v_1 propres a vérifier la formule

$$u_1^2+v_1^2=k^2-w^2=u^2+v^2,$$

et par conséquent les équations (87) et (88), ou (89) et (90), que nous avons déduites des formules (38), (39) jointes aux formules (41), entraîneront à leur tour ces formules aux quelles on pourra les substituer sans inconvénient. Donc, pour que l'élasticité de l'éther reste la même en tous sens autour d'un axe quelconque parallèle à l'axe des x, il est nécessaire et il suffit, que les formules (87), (88) subsistent non seulement quelles que soient les valeurs de w, mais encore quelles que soient les valeurs de u, v. Or s'il en est ainsi, en développant les cosinus que ces formules renferment en séries convergentes, puis égalant entre eux les termes qui dans les deux membres des mêmes formules représenteront des fonctions homogènes de u, v, w, du degré $2n$, on obtiendra les équations

(91) $S\{mr^{2n-1}(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^{2n}f(r)\}=S\{mr^{2n-1}(\pm(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+w\cos\gamma)^{2n}f(r)\}$,

et

(92) $S\{mr^{2n-3}(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^{2n}f(r)\}=S\{mr^{2n-3}(\pm(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+w\cos\gamma)^{2n}f(r)\}$,

dont la première devra être étendue à toutes les valeurs positives du nombre entier n, et la seconde à toutes les valeurs de n qui surpassent l'unité. De plus, en développant les expressions

$$(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^{2n},\quad (\pm(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+w\cos\gamma)^{2n}$$

suivant les puissances ascendantes de w dans les deux membres de chacune des formules (91), (92), on tirera de ces formules 1° pour des valeurs impaires de ν

(93) $S\{mr^{2n-1}f(r)(u\cos\alpha+v\cos\beta)^{2n-\nu}\cos^\nu\gamma\}=\pm(u^2+v^2)^{\frac{n-\nu}{2}}S\{mr^{2n-1}f(r)\cos^{2n-\nu}\alpha\cos^\nu\gamma\}$,

et

(94) $S\{mr^{2n-3}f(r)(u\cos\alpha+v\cos\beta)^{2n-\nu}\cos^\nu\gamma\}=\pm(u^2+v^2)^{\frac{n-\nu}{2}}S\{mr^{2n-3}f(r)\cos^{2n-\nu}\alpha\cos^\nu\gamma\}$,

le double signe $\pm$ pouvant être remplacé à volonté par le signe $+$ ou par le signe $-$; 2° pour des valeurs paires de ν

(95) $S\{mr^{2n-1}f(r)(u\cos\alpha+v\cos\beta)^{2n-\nu}\cos^\nu\gamma\}=(u^2+v^2)^{\frac{n-\nu}{2}}S\{mr^{2n-1}f(r)\cos^{2n-\nu}\alpha\cos^\nu\gamma\}$,

et

(96) $S\{mr^{2n-3}f(r)(u\cos\alpha+v\cos\beta)^{2n-\nu}\cos^\nu\gamma\}=(u^2+v^2)^{\frac{n-\nu}{2}}S\{mr^{2n-3}f(r)\cos^{2n-\nu}\alpha\cos^\nu\gamma\}$,

Les équations (93), (94) n'étant pas altérées tandis que leurs seconds membres changent des signes, on doit en conclure que ces seconds membres sont rigoureusement nuls. On aura donc pour des valeurs impaires de ν

(97) $$S\{mr^{2n-1}f(r)\cos^{2n-\nu}\alpha\cos^\nu\gamma\}=0,$$

(98) $$S\{mr^{2n-3}f(r)\cos^{2n-\nu}\alpha\cos^\nu\gamma\}=0,$$

et par suite les équations (93), (94) se réduiront à

(99) $$S\{mr^{2n-1}f(r)(u\cos\alpha+v\cos\beta)^{2n-\nu}\cos^{\nu}\gamma\}=0,$$

(100) $$S\{mr^{2n-3}f(r)(u\cos\alpha+v\cos\beta)^{2n-\nu}\cos^{\nu}\gamma\}=0.$$

Enfin, comme les deux expressions

$$(u\cos\alpha+v\cos\beta)^{2n-\nu},\qquad (u^2+v^2)^{n-\frac{\nu}{2}}$$

étant développées fournissent la première des termes de la forme

$$\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots(2n-\nu)}{1.2\ldots\lambda)(1.2\ldots\mu)}\,u^{\lambda}\,v^{\mu}\cos^{\lambda}\alpha\cos^{\mu}\beta$$

dans lequels les nombres λ, μ, ν liés entre eux par l'équation

(47) $$\lambda+\mu+\nu=2n$$

peuvent être pairs ou impairs, et la seconde, lorsque ν est un nombre pair, des termes de la forme

$$\frac{1.2.3\ldots(n-\frac{\nu}{2})}{(1.2\ldots\frac{\lambda}{2})\,(1.2\ldots\frac{\mu}{2})}u^{\lambda}v^{\mu}=\frac{2.4.6\ldots(2n-\nu)}{(2.4\ldots\lambda)(2.4\ldots\mu)}u^{\lambda}v^{\mu}=\frac{1.3..(\lambda-1)1.3..(\mu-1)}{1.3\ldots(2n-\nu-1)}\cdot\frac{1.2.3..(2n-\nu)}{(1.2..\lambda)(1.2..\mu)}u^{\lambda}v^{\mu},$$

dans lesquels λ, μ sont pareillement des nombres pairs, on tirera des formules (99), (100), (95) et (96), 1° pour des valeurs impaires de λ, de μ ou de ν

(48) $$S\{mr^{2n-1}f(r)\cos^{\lambda}\alpha\cos^{\mu}\beta\cos^{\nu}\gamma\}=0,$$

et

(49) $$S\{mr^{2n-3}f(r)\cos^{\lambda}\alpha\cos^{\mu}\beta\cos^{\nu}\gamma\}=0;$$

2° pour des valeurs paires de λ, μ et ν

(101) $$S\{mr^{2n-1}f(r)\cos^{\lambda}\alpha\cos^{\mu}\beta\cos^{\nu}\gamma\}=\frac{1.3\ldots(\lambda-1)1.3\ldots(\mu-1)}{1.3.5\ldots(2n-\nu-1)}S\{mr^{2n-1}f(r)\cos^{2n-\nu}\alpha\cos^{\nu}\gamma\},$$

et

(102) $$S\{mr^{2n-3}f(r)\cos^{\lambda}\alpha\cos^{\mu}\beta\cos^{\nu}\gamma\}=\frac{1.3\ldots(\lambda-1)1.3\ldots(\mu-1)}{1.3.5\ldots(2n-\nu-1)}S\{mr^{2n-3}f(r)\cos^{2n-\nu}\alpha\cos^{\nu}\gamma\},$$

le nombre entier n dont le double équivaut à la somme $\lambda+\mu+\nu$ pouvant être quelconque dans les équations (48), (101), mais devant surpasser l'unité dans les équations (49), (102). Il importe d'observer que les conditions (48), (49), déjà obtenues dans le cas, ou l'élasticité de l'éther était censée rester la même en tous sens autour d'un point quelconque, renferment comme cas particuliers les conditions (97), (98). Ajoutons que des formules (48), (49), (101) et (102) on peut remonter immédiatement aux formules (99), (100), (95) et (96), ou même aux formules (91), (92), par conséquent aux formules (89), (90) qui peuvent à leur tour être remplacées par les équations (38), (39) jointes aux équations (41). Donc en définitive les formules (48), (49), (101) et (102), étendues à toutes les valeurs positives du nombre entier n, ou du moins, s'il s'agit des formules (49) et (102), aux valeurs entières de n qui surpassent l'unité, expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'élasticité de l'éther puisse être censée rester la même en tous sens autour d'un axe quelconque parallèle à l'axe des x.

Lorsque ces conditions sont remplies, on tire des formules (10) et (11) jointes aux formules (87) et (88)

$$(103)\qquad \mathfrak{V}=\mathrm{S}\left\{\frac{mf(r)}{r}\left[1-\cos r\left(\pm(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+w\cos\gamma\right)\right]\right\},$$

$$(104)\qquad \mathfrak{P}=\mathrm{S}\left\{\frac{mf(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}\left(\pm(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+w\cos\gamma\right)^2+\frac{\cos\left(r\left(\pm(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+w\cos\gamma\right)\right)}{r^2}\right]\right\};$$

et, comme dans ces dernières on peut supposer le double signe $\pm$ arbitrairement réduit soit au signe $+$ soit au signe $-$, il est clair, qu'on pourra prendre encore pour valeur de $\mathfrak{V}$ ou de $\mathfrak{P}$ la demi-somme des resultats obtenus dans ces deux suppositions. En opérant ainsi, et ayant égard aux formules

$$\frac{\left((u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+w\cos\gamma\right)^2+\left(-(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+w\cos\gamma\right)^2}{2}=(u^2+v^2)\cos^2\alpha+w^2\cos^2\gamma,$$

$$\cos\left(r\left((u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+w\cos\gamma\right)\right)+\cos\left(r\left(-(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+w\cos\gamma\right)\right)=\cos\left\{r(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha\right\}\cos(rw\cos\gamma),$$

on trouvera

$$(105)\qquad \mathfrak{V}=\mathrm{S}\left\{\frac{mf(r)}{r}\left[1-\cos\left\{r(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha\right\}\cos(rw\cos\gamma)\right]\right\},$$

$$(106)\qquad \mathfrak{P}=\mathrm{S}\left\{\frac{mf(r)}{r}\left[\frac{(u^2+v^2)\cos^2\alpha+w^2\cos^2\gamma}{2}+\frac{\cos\left\{r(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha\right\}\cos(rw\cos\gamma)}{r^2}\right]\right\}$$

En resumé $\mathfrak{V}$ et φ seront seulement fonctions des quantités variables

$$u^2 + v^2 \qquad \text{et} \qquad w^2.$$

D'autre part, si, après avoir fait pour abréger

(107) $$K_1 = \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2), \qquad K_2 = \tfrac{1}{2} w^2,$$

on désigne par

$$\varphi_1, \qquad \varphi_{1,1}$$

les derivées du premier et du second ordre de φ consideré comme fonctions de K_1 par

$$\varphi_2, \qquad \varphi_{2,2}$$

les dérivées du premier et du second ordre de φ consideré comme fonctions de K_2, et par

$$\varphi_{1,2}$$

la derivée du second ordre de φ differentié une fois par rapport à chacune des variables K_1, K_2, on trouvera

(108) $$\frac{dK_1}{du} = u, \qquad \frac{dK_1}{dv} = v, \qquad \frac{dK_2}{dw} = w,$$

et par suite

(109) $$\frac{d\varphi}{du} = u\varphi_1, \qquad \frac{d\varphi}{dv} = v\varphi_1, \qquad \frac{d\varphi}{dw} = w\varphi_2,$$

(110) $$\frac{d^2\varphi}{du^2} = \varphi_1 + u^2\varphi_{1,1}, \quad \frac{d^2\varphi}{dv^2} = \varphi_1 + v^2\varphi_{1,1}, \quad \frac{d^2\varphi}{dw^2} = \varphi_2 + w^2\varphi_{2,2},$$

(111) $$\frac{d^2\varphi}{dvdw} = vw\varphi_{1,2}, \qquad \frac{d^2\varphi}{dwdu} = wu\varphi_{2,2}, \qquad \frac{d^2\varphi}{dudv} = uv\varphi_{1,1}.$$

En conséquence les formules (8), (9) donneront

(112) $$\mathfrak{L} = \mathfrak{V} + \varphi_1 + u^2\varphi_{1,1}, \qquad \mathfrak{M} = \mathfrak{V} + \varphi_1 + v^2\varphi_{1,1}, \qquad \mathfrak{N} = \mathfrak{V} + \varphi_2 + w^2\varphi_{2,2},$$

(113) $$\mathfrak{P} = vw\varphi_{1,2}, \qquad \mathfrak{Q} = wu\varphi_{2,2}, \qquad \mathfrak{R} = uv\varphi_{1,1};$$

et l'équation (7) c'est à dire l'équation de l'ellipsoide qui détermine les loix de la polarisation deviendra

$$(114)\quad (\mho+\mathcal{P}_1)(x^2+y^2)+\mathcal{P}_{1,1}(ux+vy)^2+2\mathcal{P}_{1,2}(ux+vy)wz+(\mho+\mathcal{P}_2+\mathcal{P}_{2,2}w^2)z^2=1.$$

Lorsque le plan de l'onde primitive coincide avec le plan de x, y, on a

$$a=0, \quad b=0, \quad c=\pm 1;$$

on en conclut

$$u=0, \quad v=0, \quad w=\pm k,$$

et la formule (114) se réduit à

$$(115)\qquad (\mho+\mathcal{P}_1)(x^2+y^2)+(\mho+\mathcal{P}_2+\mathcal{P}_{2,2}k^2)z^2=1.$$

Donc alors, comme il etait facile de le prévoir, l'ellipsoide (7) est de révolution autour de l'axe des z, et dans cet ellipsoide le carré du rayon de l'équateur est

$$\frac{1}{\mho+\mathcal{P}_1},$$

le carré du demi-axe de révolution étant

$$\frac{1}{\mho+\mathcal{P}_2+\mathcal{P}_{2,2}k^2}.$$

Donc, si l'on nomme généralement Ω', Ω'', Ω''' les vitesses de propagation des trois ondes planes dans lesquelles se divise une onde primitive de lumière non polarisée, on pourra prendre, dans le cas particulier dont il s'agit,

$$(116)\qquad \Omega'^2=\Omega''^2=\frac{\mho+\mathcal{P}_1}{k^2},$$

$$(117)\qquad \Omega'''^2=\frac{\mho+\mathcal{P}_2}{k^2}+\mathcal{P}_{2,2},$$

et les deux premières ondes, se propageant avec la même vitesse, se superposeront de manière à n'en plus former qu'une seule. C'est ce qui arrive dans certains cristaux où les deux rayons polarisés que l'oeil peut appercevoir, et qui produisent ce qu'on appelle la double refraction, se confondent dés que le plan de l'onde devient perpendiculaire à un certain axe nommé *l'axe optique* du cristal.

Sans rien changer à la direction de l'axe des x, on peut disposer du plan des y, z, de manière à simplifier l'équation (114). Effectivement on y parviendra, en faisant coincider le plan des y, z avec celui qui passant par l'axe des x sera perpendiculaire au plan de l'onde. Alors la droite OP, perpendiculaire au plan de l'onde se trouvera comprise dans le plan des y, z; et comme on aura par suite

$$u = 0,$$

la formule (34) donnera

$$v = \pm (k^2 - w^2)^{\frac{1}{2}}.$$

En conséquence l'équation (114) deviendra

$$(118)\quad (\mho+\varphi_1)x^2+(\mho+\varphi_2+\varphi_{2,2}(k^2-w^2))y^2 \pm 2\varphi_{2,3}(k^2-w^2)^{\frac{1}{2}} wyz+(\mho+\varphi_3+\varphi_{3,3}w^2)z^2=1.$$

Dans cette dernière le double signe $\pm$ pourra être réduit arbitrairement soit au signe $+$, soit au signe $-$. Dailleurs, en vertu de ce qui a été dit précédemment [page 15], les valeurs de $\mho$, φ et par suite celles de φ', φ'' ne varieront pas dans le passage de l'équation (114) à l'équation (118). Maintenant il est clair, que l'ellipsoide représenté par l'équation (118) offrira un axe dirigé suivant l'axe des x, c'est a dire, suivant la trace du plan de l'onde sur le plan des x, y. Les deux autres axes de l'ellipsoide se confondront avec les axes de la section faite dans cet ellipsoide par le plan des y, z, c'est à dire, avec les deux axes de l'ellipse représentée par l'équation

$$(119)\quad (\mho+\varphi_2+\varphi_{2,2}(k^2-w^2))\, y^2 \pm 2\varphi_{2,3}(k^2-w^2)^{\frac{1}{2}} wyz+(\mho+\varphi_3+\varphi_{3,3}w^2)z^2=1.$$

Cela posé soient

$$\frac{1}{s'^2}$$

le carré du demi-axe qui, dans l'ellipsoide, coincide avec la trace du plan de l'onde primitive sur le plan mené par le point O perpendiculairement à l'axe des z, et

$$\frac{1}{s''^2}, \qquad \frac{1}{s'''^2}$$

les carrés des demi-axes de l'ellipse (134). Les vitesses de propagation

$$\Omega', \quad \Omega'', \quad \Omega'''$$

des trois ondes polarisées seront déterminées par les formules

$$(120)\qquad \Omega'^2 = \frac{s'^2}{k^2}, \quad \Omega''^2 = \frac{s''^2}{k^2}, \quad \Omega'''^2 = \frac{s'''^2}{k^2},$$

la valeur de s'^2 étant

$$(121)\qquad s'^2 = \mho + \varphi_1,$$

tandis que s''^2, s'''^2 représenteront les deux valeurs de s^2 propres à vérifier l'équation

$$(122)\qquad \{s^2 - (\mho + \varphi_2 + \varphi_{1,1}(k^2 - w^2))\}\{s^2 - (\mho + \varphi_2 + \varphi_{2,2}w^2)\} - \varphi_{1,2}^2(k^2 - w^2)w^2 = 0.$$

Lorsque le plan de l'onde primitive est perpendiculaire à l'axe des z, ou ce qui revient au même, l'orsqu'on a

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = \pm k,$$

l'équation (122) se réduit à

$$(123)\qquad \{s^2 - (\mho + \varphi_2)\}\{s^2 - (\mho + \varphi_2 + \varphi_{2,2}k_2)\} = 0.$$

On peut donc prendre alors

$$(124)\qquad s''^2 = \mho + \varphi_2, \qquad s'''^2 = \mho + \varphi_2 + \varphi_{2,2}k^2;$$

et, en combinant les formules (120) avec les formules (121), (124), on se trouve immédiatement ramené aux équations (116), (117).

Lorsque le plan de l'onde primitive passe par l'axe des z, c'est à dire, lorsqu'on a

$$w = 0,$$

l'équation (122) se réduit à

$$(125)\qquad \{s^2 - (\mho + \varphi_2 + \varphi_{1,1}k^2)\}\{s^2 - (\mho + \varphi_2)\} = 0.$$

On peut donc prendre alors

$$(126)\qquad s''^2 = \mho + \varphi_2, \qquad s'''^2 = \mho + \varphi_2 + \varphi_{1,1}k^2.$$

Alors aussi l'équation (118), réduite à

$$(127)\qquad (\mho + \varphi_1)\,x^2 + (\mho + \varphi_1 + \varphi_{1,1}k^2)\,y^2 + (\mho + \varphi_2)\,z^2 = 1,$$

représente un ellipsoïde qui a pour axes les axes coordonnés; et l'on peut affirmer, que des trois ondes planes produites par la subdivision de l'onde primitive, dont le

plan renferme l'axe des z, les deux premières se composent de lumière polarisée parallèlement à deux axes rectangulaires compris dans ce plan, et dont l'un est l'axe des z, tandis que la troisième se compose de lumière polarisée perpendiculairement au plan de l'onde. Enfin, lorsque l'axe des z se trouve incliné d'une manière quelconque sur le plan de l'onde primitive, les quantités s''^2, s'''^2 déterminées par l'équation (122) coïncident avec les deux valeurs de s^2 données par la formule

$$(128)\quad s^2 = \mho + \frac{\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_{1,1}(k^2-w^2) + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_{2,2}w^2}{2} \pm \sqrt{\left\{\frac{(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_{1,1}(k^2-w^2) - \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_{2,2}w^2)^2}{2} + \mathcal{P}_{2,1}^2(k^2-w^2)w^2\right\}}.$$

Observons encore que l'équation (127) peut être présentée sous la forme

$$(129)\quad \left\{\begin{array}{l} (\mho + \mathcal{P}_1)(x^2+y^2+z^2) + \mathcal{P}_{1,1}(ux+vy+wz)^2 \\ + 2(\mathcal{P}_{2,1} - \mathcal{P}_{1,1})(ux+vy)wz + (\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1 + (\mathcal{P}_{2,2} - \mathcal{P}_{1,1})w^2)z^2 = 1; \end{array}\right.$$

et que cette équation, devenant semblable à l'équation (58), lorsque les différences

$$(130)\qquad \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1, \qquad \mathcal{P}_{2,1} - \mathcal{P}_{1,1}, \qquad \mathcal{P}_{2,2} - \mathcal{P}_{1,1}$$

s'évanouissent, représente alors, comme l'équation (58), un ellipsoïde de révolution, qui a pour équateur le plan de l'onde primitive. Donc, si les différences (130), sans être nulles, sont très petites, l'ellipsoïde représenté par l'équation (129) différera peu d'un ellipsoïde de révolution qui aurait pour axe de révolution la droite OP menée par le point O perpendiculairement au plan de l'onde; et des trois ondes de lumière polarisée produites par la subdivision d'une onde primitive les deux premières offriront des vitesses de propagation peu différentes entre elles, et des molécules éthérées dont les vitesses propres seront dirigées suivant des droites sensiblement parallèles au plan de chaque onde. C'est effectivement ce qui arrive, quand la lumière traverse un cristal doué de la double réfraction.

---

§. 4. *Propagation des ondes lumineuses dans un milieu où l'élasticité de l'éther reste la même en tous sens.*

Considérons un milieu dans lequel l'élasticité de l'éther reste la même en tous sens. Alors, comme on l'a dit [page 26], des trois ondes planes dans lesquelles se divise généralement une onde plane de lumière non polarisée les deux premières, se propageant avec la même vitesse, se superposeront de manière à n'en plus former qu'une seule dans laquelle la lumière sera polarisée parallèlement au plan de l'onde primitive, tandis que dans la troisième la lumière sera polarisée perpendiculairement à ce plan. De plus la troisième onde disparaîtra, si c'est dans le plan même de l'onde primitive que sont dirigés les déplacements et les vibrations initiales de molécules, et alors il n'y aura plus de polarisation. On arrive à la même conclusion, en substituant dans les équations (25) du §. 2 les valeurs de $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ que fournissent les équations (56), (57) du § 3. pour le cas où l'élasticité de l'éther reste la même dans tous le sens. Effectivement, après la substitution dont il s'agit, les formules (25) du §. 2 se réduisent à

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= -(\mathfrak{O}+\mathfrak{P}')\,\xi - u\,\mathfrak{P}''\,(u\xi+v\eta+w\zeta), \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -(\mathfrak{O}+\mathfrak{P})\,\eta - v\,\mathfrak{P}''\,(u\xi+v\eta+w\zeta), \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -(\mathfrak{O}+\mathfrak{P}')\,\zeta - w\,\mathfrak{P}''\,(u\xi+v\eta+w\zeta). \end{aligned}\right.$$

Si maintenant on ajoute les formules (1) après avoir multiplié les deux membres de la première par u, de la seconde par v, de la troisième par w, et si l'on a égard à l'équation

$$(2)\qquad u^2+v^2+w^2=k^2,$$

on trouvera

$$(3)\qquad \frac{d^2(u\xi+v\eta+w\zeta)}{dt^2} = -(\mathfrak{O}+\mathfrak{P}'+\mathfrak{P}''k^2)(u\xi+v\eta+w\zeta).$$

Cela posé, en tenant compte des formules (26), (27) du § 2, on déduira sans peine de l'équation (3) la valeur générale de

$$u\xi+v\eta+w\zeta,$$

puis, après avoir substitué cette valeur dans chacune des formules (1), on tirera de ces dernières formules les valeurs des trois inconnues ξ, η, ζ.

Lorsque les déplacements et les vitesses des molécules de l'éther sont primitivement parallèles au plan de l'onde lumineuse, les valeurs initiales des deux quantités

$$u\xi + v\eta + w\zeta, \qquad \frac{u d\xi}{dt} + \frac{v d\eta}{dt} + \frac{w d\zeta}{dt}$$

s'évanouissent, et l'équation (3) donne généralement

(4) $$u\xi + v\eta + w\zeta = 0.$$

Par suite, en posant pour abréger

(5) $$s^2 = \mho + \varphi^2,$$

on réduit les formules (1) à

(6) $$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -s^2\xi, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -s^2\eta, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -s^2\zeta.$$

Or on tire des formules (6)

(7) $$\xi = \xi_0 \cos st + \xi_1 \frac{\sin st}{s}, \quad \eta = \eta_0 \cos st + \eta_1 \frac{\sin st}{s} \quad \zeta = \zeta_0 \cos st + \zeta_1 \frac{\sin st}{s},$$

ξ_0, η_0, ζ_0, ξ_1, η_1, ζ_1 designant les valeurs initiales de

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{d\zeta}{dt},$$

Dailleurs ces valeurs initiales que déterminent les équations (26), (27) du § 2, jointes à léquation

(8) $$v = ax + by + cz$$

ou, ce qui revient au même, à la formule

(9) $$kv = ux + vy + wz,$$

devront vérifier des conditions semblables soit à la condition (78), soit à la condition (63) du § 2, si l'on veut obtenir seulement des ondes lumineuses dont la vitesse de propagation soit dirigée dans le même sens que la droite OP, ou des ondes lumineuses dont la vitesse de propagation soit dirigée dans le sens opposé, la droite OP étant celle qui forme avec les demi-axes des coordonnées positives les angles dont les cosinus sont respectivement

(10) $$a = \frac{u}{k}, \quad b = \frac{v}{k}, \quad c = \frac{w}{k}.$$

Dans le premier cas, on aura

(11) $$\xi_1 = -\Omega \frac{d\xi_0}{dt}, \quad \eta_1 = -\Omega \frac{d\eta_0}{dt}, \quad \zeta_1 = -\Omega \frac{d\zeta_0}{dt},$$

la vitesse de propagation d'une onde étant

$$\Omega = \frac{s}{k}; \tag{12}$$

et des formules (7), (10), (11) jointes aux équations

$$\left\{\begin{aligned} \xi_0 &= \mathfrak{d}_0 \cos kv + \mathfrak{g}_0 \sin kv = \varphi(v), \\ \eta_0 &= \mathfrak{e}_0 \cos kv + \mathfrak{h}_0 \sin kv = \chi(v), \\ \zeta_0 &= \mathfrak{f}_0 \cos kv + \mathfrak{i}_0 \sin kv = \psi(v), \end{aligned}\right. \tag{13}$$

on tirera

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \mathfrak{d}_0 \cos(kv - st) + \mathfrak{g}_0 \sin(kv - st) = \varphi(v - \Omega t), \\ \eta &= \mathfrak{e}_0 \cos(kv - st) + \mathfrak{h}_0 \sin(kv - st) = \chi(v - \Omega t), \\ \zeta &= \mathfrak{f}_0 \cos(kv - st) + \mathfrak{i}_0 \sin(kv - st) = \psi(v - \Omega t). \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Dans le second cas les formules (14) devraient être remplacées par celles qu'on en déduit en substituant aux binomes

$$kv - st, \quad v - \Omega t$$

les binomes

$$kv + st, \quad v + \Omega t.$$

Ajoutons que, l'équation (4) devant être vérifiée indépendamment des valeurs attribuées à v et à t, par conséquent pour des valeurs de

$$kv - st$$

égales à zero et à $\frac{\pi}{2}$, on trouvera entre les constantes arbitraires

$$\mathfrak{d}_0, \ \mathfrak{e}_0, \ \mathfrak{f}_0; \quad \mathfrak{g}_0, \ \mathfrak{h}_0, \ \mathfrak{i}_0$$

des relations exprimées par les formules

$$u\mathfrak{d}_0 + v\mathfrak{e}_0 + w\mathfrak{f}_0 = 0, \qquad u\mathfrak{g}_0 + v\mathfrak{h}_0 + w\mathfrak{i}_0 = 0, \tag{15}$$

ou, ce qui revient au même, par les formules

$$a\mathfrak{d}_0 + b\mathfrak{e}_0 + c\mathfrak{f}_0 = 0, \quad a\mathfrak{g}_0 + b\mathfrak{h}_0 + c\mathfrak{i}_0 = 0, \tag{16}$$

desquelles on tirera

$$a\varphi(v) + b\chi(v) + c\psi(v) = 0. \tag{17}$$

Soient maintenant

$$a', \quad b', \quad c', \quad \text{et} \quad a'', \quad b'', \quad c''$$

les cosinus des angles formés avec les demi-axes des coordonnées postives par deux nouvelles droites OQ, OR perpendiculaires entre elles, et à la droite OP. Posons d'ailleurs

$$a'\varphi(v) + b'\chi(v) + c'\psi(v) = \varpi(v), \tag{18}$$

et

$$a''\varphi(v) + b''\chi(v) + c''\psi(v) = \Pi(v), \tag{19}$$

Les trois axes OP, OQ, OR étant rectangulaires entre eux aussi bien que les axes des x, y, z, on aura non seulement

$$\left\{\begin{array}{lll} a^2 + b^2 + c^2 = 1, & a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, & a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, & a''a + b''b + c''c = 0, & aa' + bb' + cc' = 0; \end{array}\right. \tag{20}$$

mais encore

$$\left\{\begin{array}{lll} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, & b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, & c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \\ bc + b'c' + b''c'' = 0, & ca + c'a' + c''a'' = 0, & ab + a'b' + a''b'' = 0; \end{array}\right. \tag{21}$$

et par suite des formules (17), (18), (19), respectivement multipliées par a, a', a'' ou par b, b', b'', ou enfin par c, c', c'', on tirera

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(v) = a'\varpi(v) + a''\Pi(v), \\ \chi(v) = b'\varpi(v) + b''\Pi(v), \\ \psi(v) = c'\varpi(v) + c''\Pi(v), \end{array}\right. \tag{22}$$

En conséquence les formules (14) donneront

$$\left\{\begin{array}{l} \xi = a'\varpi(v - \Omega t) + a''\Pi(v - \Omega t), \\ \eta = b'\varpi(v - \Omega t) + b''\Pi(v - \Omega t), \\ \zeta = c'\varpi(v - \Omega t) + c''\Pi(v - \Omega t). \end{array}\right. \tag{23}$$

Observons d'ailleurs que si l'on fait pour abréger

$$a'\mathfrak{d}_0 + b'\mathfrak{e}_0 + c'\mathfrak{f}_0 = \mathfrak{A}, \quad a'\mathfrak{g}_0 + b'\mathfrak{h}_0 + c'\mathfrak{i}_0 = \mathfrak{B}, \tag{24}$$

$$a''\mathfrak{d}_0 + b''\mathfrak{e}_0 + c''\mathfrak{f}_0 = \mathfrak{C}, \quad a''\mathfrak{g}_0 + b''\mathfrak{h}_0 + c''\mathfrak{i}_0 = \mathfrak{D}, \tag{25}$$

on conclura des formules (18) (19) jointes aux équations (13)

$$(26)\qquad \begin{cases} \varpi(v) = \mathfrak{A}\cos kv + \mathfrak{B}\sin kv, \\ \Pi(v) = \mathfrak{C}\cos kv + \mathfrak{D}\sin kv. \end{cases}$$

Dans le cas particulier où le plan de l'onde primitive devient parallèle à l'axe des z, et où la droite OP, renfermée dans l'angle que comprennent entre eux les demi-axes des x et des y positives, forme avec le premier de ces demi-axes un angle aigu représenté par τ, l'on a

$$(27)\qquad a = \cos\tau, \quad b = \sin\tau, \quad c = 0.$$

Dans le même cas, en faisant coïncider la droite OQ avec un demi-axe mené dans le plan des x, y perpendiculairement à la droite OP, et la droite OR avec le demi-axe des z positives, on trouvera

$$(28)\qquad a' = \sin\tau, \quad b' = -\cos\tau, \quad c' = 0$$

et

$$(29)\qquad a'' = 0, \quad b'' = 0, \quad c'' = 1.$$

Par suite les formules (23) donneront

$$(30)\qquad \xi = \sin\tau\,\varpi(v-\Omega t), \quad \eta = -\cos\tau\,\varpi(v-\Omega t), \quad \zeta = \Pi(v-\Omega t);$$

et, comme on tirera de l'équation (8)

$$(31)\qquad v = x\cos\tau + y\sin\tau,$$

on aura définitivement

$$(32)\quad \xi = \sin\tau\,\varpi(x\cos\tau + y\sin\tau - \Omega t),\ \eta = -\cos\tau\,\varpi(x\cos\tau + y\sin\tau - \Omega t),\ \zeta = \Pi(x\cos\tau + y\sin\tau - \Omega t),$$

les fonctions $\varpi(v)$, $\Pi(v)$ étant toujours déterminées par les formules (26), ou ce qui revient au même, eu l'égard à l'équation (12),

$$(33)\quad \begin{cases} \xi = \sin\tau\left\{\mathfrak{A}\cos(k(x\cos\tau + y\sin\tau) - st) + \mathfrak{B}\sin(k(x\cos\tau + y\sin\tau) - st)\right\}, \\ \eta = -\cos\tau\left\{\mathfrak{A}\cos(k(x\cos\tau + y\sin\tau) - st) + \mathfrak{B}\sin(k(x\cos\tau + y\sin\tau) - st)\right\}, \\ \zeta = \mathfrak{C}\cos(k(x\cos\tau + y\sin\tau) - st) + \mathfrak{D}\sin(k(x\cos\tau + y\sin\tau) - st). \end{cases}$$

Remarquons encore que l'équation (5) ou, en d'autres termes, l'équation (18) du §. 3 peut être remplacée par la formule (80) du même paragraphe ; et que, si l'on fait pour abréger

$$(34) \qquad s_n = S\,\frac{mr^{2n-1}\cos^{2n}\alpha}{1.2.3\ldots 2n}\left[f(r) + \frac{1}{2n+1}f(r)\cos^2\alpha\right],$$

cette formule donnera simplement

$$(35) \qquad s^2 = s_1 k^2 + s_2 k^4 + s_3 k^6 + \text{etc.}$$

De cette dernière jointe à la formule (12) on conclura

$$(36) \qquad \Omega^2 = s_1 + s_2 k^2 + s_3 k^4 + \text{etc.}$$

D'ailleurs en designant par l l'épaisseur d'une onde plane et par T la durée des oscillations moléculaires du fluide éthéré, on aura, comme dans les paragraphes précédents,

$$(37) \qquad k = \frac{2\pi}{l}, \qquad\qquad (38) \qquad s = \frac{2\pi}{T}.$$

Il est important d'observer, qu'en vertu de la formule (38) la quantité s dépend uniquement de la durée des oscillations moléculaires, c'est a dire, de la nature de la couleur, tandis qu'en vertu de l'équation (35) jointe aux formules (12) et (37) les quantités k, Ω et l dependent simultanément de la couleur et de la nature du milieu dans lequel se propagent les ondes lumineuses. Quant à l'angle τ il depend uniquement de la direction des plans parallèles qui renferment ces mêmes ondes.

---

§. 5. *Sur la réfraction de la lumière.*

Considerons deux milieux séparés par le plan des $y\,z$ dont chacun soit tel que l'éther y offre la même élasticité en tous sens, et dans l'un desquels se propagent des ondes lumineuses dont les plans soient parallèles à l'axe des z. L'existence de ces ondes que nous nommerons incidentes entrainera la coëxistence 1° d'un second système d'ondes propagées dans le premier milieu, et que l'on nomme réflechies, 2° d'un troisième système d'ondes propagées dans le second milieu, et que l'on nomme réfractées. Car, en faisant abstraction de ces ondes réflechies et réfractées, on ne pourrait satisfaire aux conditions relatives à la surface de séparation des deux milieux.

Nous avons montré dans le bulletin des sciences comment de la remarque précédente on peut déduire non seulement les loix de la réflexion et de la réfraction de la lumière, mais encore la détermination de la quantité de lumière polarisée par réflexion et par réfraction sous une incidence donnée, la loi de Brewster sur l'angle

de polarisation complette, et les formules inserées par Fresnel dans le n° 17 des annales de physique et de chimie. Nous nous bornerons pour l'instant à déduire de la même remarque la loi de la réfraction, en admettant, comme l'expérience le prouve, que la réflexion ne change pas la nature de la couleur, et que l'angle d'incidence est egal à l'angle de réflexion.

Pour un seul des trois systèmes d'ondes incidentes, réflechies, ou réfractées, les déplacements ξ, η, ζ, de la molécule lumineuse correspondante au point (x, y, z) se trouveraient déterminés par des équations semblables aux formules (33) du § 3. Ajoutons que, dans le passage des ondes incidentes aux ondes réflechies, les quantités s et T ne varieront point, ni même les quantités k, Ω, l, puisque les premières dépendent uniquement de la couleur, les autres de la couleur et de la nature du milieu. Quant à l'angle d'incidence τ, on devra le remplacer, lorsqu'on passera des ondes incidentes aux ondes réflechies, par son supplément $\pi-\tau$, afin d'exprimer que les deux angles d'incidence et de réflexion sont egaux entre eux; et par suite on devra dans ce cas changer seulement le signe de la première des deux lignes trigonométriques $\cos\tau$, $\sin\tau$.

Cela posé soient

$$\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{C}_1, \quad \mathfrak{D}_1$$

ce que deviennent les coefficients

$$\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{D}$$

quand on passe du système des ondes incidentes au système des ondes réflechies, et

$$s', \ T', \ k', \ \Omega', \ l', \ \mathfrak{A}', \ \mathfrak{B}', \ \mathfrak{C}', \ \mathfrak{D}'$$

ce que deviennent les quantités

$$s, \ T, \ k, \ \Omega, \ l, \ \mathfrak{A}, \ \mathfrak{B}, \ \mathfrak{C}, \ \mathfrak{D}$$

quand on passe du système des ondes incidentes aux ondes réfractées. Si l'on considère à la fois les deux systèmes d'ondes propagées dans le premier milieu, on devra, pour ce milieu, remplacer les équations (33) du § 3 par les formules

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}
\xi = {} & \sin\tau\left\{\mathfrak{A}\cos(k(\ x\cos\tau+y\sin\tau)-st)+\mathfrak{B}\sin(k(\ x\cos\tau+y\sin\tau)-st)\right\} \\
& +\sin\tau\left\{\mathfrak{A}_1\cos(k(-x\cos\tau+y\sin\tau)-st)+\mathfrak{B}_1\sin(k(-x\cos\tau+y\sin\tau)-st)\right\}, \\
\eta = {} & -\cos\tau\left\{\mathfrak{A}\cos(k(\ x\cos\tau+y\sin\tau)-st)+\mathfrak{B}\sin(k(\ x\cos\tau+y\sin\tau)-st)\right\} \\
& +\cos\tau\left\{\mathfrak{A}_1\cos(k(-x\cos\tau+y\sin\tau)-st)+\mathfrak{B}_1\sin(k(-x\cos\tau+y\sin\tau)-st)\right\}, \\
\zeta = {} & \mathfrak{C}\cos(k(\ x\cos\tau+y\sin\tau)-st)+\mathfrak{D}\sin(k(\ x\cos\tau+y\sin\tau)-st) \\
& +\mathfrak{C}_1\cos(k(-x\cos\tau+y\sin\tau)-st)+\mathfrak{D}_1\sin(k(-x\cos\tau+y\sin\tau)-st).
\end{aligned}\right.$$

On trouvera au contraire pour le second milieu

$$(2)\begin{cases} \xi = \sin\tau' \{\mathfrak{A}'\cos(k'(x\cos\tau'+y\sin\tau')-s't)+\mathfrak{B}'\sin(k'(x\cos\tau'+y\sin\tau')-s't)\}, \\ \eta = -\cos\tau' \{\mathfrak{A}'\cos(k'(x\cos\tau'+y\sin\tau')-s't)+\mathfrak{B}'\sin(k'(x\cos\tau'+y\sin\tau')-s't)\}, \\ \zeta = \mathfrak{C}'\cos(k'(x\cos\tau'+y\sin\tau')-s't)+\mathfrak{D}'\sin(k'(x\cos\tau'+y\sin\tau')-s't), \end{cases}$$

D'ailleurs la surface de séparation des deux milieux, et des deux masses de fluide éthéré qui s'y trouvent comprises, coincide, lorsque ces deux masses sont dans l'état naturel, avec le plan des y, z représenté par l'équation

$$(3) \qquad x = 0;$$

et, pour que ces deux masses restent contigues l'une à l'autre pendant la durée du mouvement, il est nécessaire que la valeur de ξ relative à un instant donné, et à un point donné de la surface de séparation, ne soit point altérée, quand on passe de la première masse à la seconde. Enfin, comme, en posant $x = 0$, on tire de la première des équations (1)

$$(4) \qquad \xi = \sin\tau \{(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}_1)\cos(ky\sin\tau - st)+(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1)\sin(ky\sin\tau - st)\},$$

et de la première des équations (2)

$$(5) \qquad \xi = \sin\tau' \{\mathfrak{A}'\cos(k'y\sin\tau' - s't)+\mathfrak{B}'\sin(k'y\sin\tau' - s't)\},$$

la condition que nous venons d'énoncer donnera

$$(6) \qquad \sin\tau \{(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}_1)\cos(ky\sin\tau - st)+(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1)\sin(ky\sin\tau - st)\}$$
$$= \sin\tau' \{\mathfrak{A}'\cos(k'y\sin\tau' - s't)+\mathfrak{B}'\sin(k'y\sin\tau' - s't)\};$$

si toutefois l'on admetque l'on puisse sans erreur sensible ne pas tenir compte des légères modifications que peut apporter le voisinage du second milieu à la valeur de ξ déterminée par la première des équations (1), et le voisinage du premier milieu à la valeur de ξ déterminée par la première des équations (2).

Observons maintenant que, l'équation (6) devant subsister indépendamment des valeurs attribuées aux variables y et t, les coefficients des puissances semblables de y et de t devront être égaux dans les deux membres de cette équation developpés en séries convergentes ordonnées suivant les puissances dont il s'agit. De cette seule considération l'on déduira immédiatement les formules

$$(7) \qquad (\mathfrak{A}+\mathfrak{A}_1)\sin\tau = \mathfrak{A}'\sin\tau', \quad (\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1)\sin\tau = \mathfrak{B}'\sin\tau',$$

$$(8) \qquad k\sin\tau = k'\sin\tau', \qquad (9) \qquad s = s',$$

auxquelles on parvient encore très simplement de la manière suivante.

Si l'on pose $y = 0$ et $t = 0$ 1° dans l'équation (6), 2° dans cette même équation differentiée une, deux ou trois fois de suite par rapport à t, on en tirera successivement

$$(10)\qquad \left\{ \begin{aligned} (\mathfrak{A} + \mathfrak{A}_1) \sin \tau &= \mathfrak{A}' \sin \tau', \\ s\,(\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_1) \sin \tau &= s'\, \mathfrak{B}' \sin \tau', \\ s^2\,(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}_1) \sin \tau &= s'^2\, \mathfrak{A}' \sin \tau', \\ s^3\,(\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_1) \sin \tau &= s'^3\, \mathfrak{B}' \sin \tau', \end{aligned} \right.$$

Or la première des équations (10) jointe à la quatrième, et la seconde jointe à la troisième, entraineront les formules (7) et l'équation

$$s^2 = s'^2,$$

de laquelle on conclura, en extrayant les racines quarrées positives des deux membres,

$$s = s'.$$

Si l'on posait $t = 0$ dans l'équation (6) differentiée une, deux, ou trois fois, non plus par rapport à t, mais par rapport à y, on obtiendrait trois nouvelles formules, qui jointes aux formules (10) entraineraient non seulement les équations (7) et (9), mais encore l'équation (8). La seconde de ces nouvelles formules serait

$$(11)\qquad k \sin \tau\, (\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_1) \sin \tau = k' \sin \tau'\, \mathfrak{B}' \sin \tau',$$

et en la combinant avec la seconde des formules (7) on obtiendrait immédiatement l'équation (8).

En vertu de l'équation (9), la quantité s, réciproquement proportionelle à la durée T des oscillations moléculaires du fluide etheré, ne varie pas dans le passage d'un milieu à un autre, et par conséquent la réfraction ne change pas la nature de la couleur. Donc, si un rayon de lumière rouge, après s'être propagé dans l'air, traverse un liquide tel que l'eau, il paraitra rouge encore à un observateur dont l'oeil serait plongé dans ce liquide. Quant à l'équation (8), elle donnera

$$(12)\qquad \frac{\sin \tau'}{\sin \tau} = \frac{k}{k'}.$$

D'ailleurs, en nommant Ω, Ω' les vitesses de propagation de la lumière dans le premier et le second milieu, on aura, en vertu de la formule (12) du §. 4,

$$(13)\qquad \Omega = \frac{s}{k}, \qquad\qquad \Omega' = \frac{s'}{k'} = \frac{s}{k'},$$

et par suite

$$(14)\qquad \frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{k}{k'}.$$

Donc l'équation (12) pourra être réduite à

$$(15)\qquad \frac{\sin \tau'}{\sin \tau} = \frac{\Omega'}{\Omega}.$$

Or la formule (15) montre que le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction est constamment égal au rapport entre les vitesses de propagation de la lumière dans le premier et le second milieu. Cette conclusion se trouve, comme l'on sait, confirmée par l'expérience. Car, en faisant varier l'angle d'incidence pour un rayon d'une couleur donnée, qui tombe sur la surface d'un corps réfringent, on obtient toujours le même rapport entre les sinus des deux angles d'incidence et de réfraction.

Le rapport entre les sinus de l'angle d'incidence τ et de l'angle de réfraction τ' est ce qu'on nomme *l'indice* de réfraction. Si l'on designe cet indice par θ, on aura en vertu de la formule (12)

$$\theta = \frac{\sin \tau}{\sin \tau'} = \frac{k'}{k},$$

et par suite

$$(16)\qquad k' = \theta k.$$

---

§. 6. *Applications numériques.*

Lorsque dans un milieu transparent l'élasticité de l'éther reste la même en tous sens, la durée T des oscillations moléculaires du fluide éthéré se trouve liée à l'épaisseur l d'une onde plane par l'équation

$$(1)\qquad s^2 = a_1 k^2 + a_2 k^4 + a_3 k^6 + \text{etc.},$$

[voyez la formule (35) du §. 4], dans laquelle on a

$$(2)\qquad s = \frac{2\pi}{T}, \qquad\qquad (3)\qquad k = \frac{2\pi}{l}.$$

D'ailleurs, la vitesse de propagation Ω d'un rayon de lumière étant donnée par la formule

(4) $$\Omega = \frac{s}{k}$$

on aura encore

(5) $$\Omega^2 = \mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 k^2 + \mathrm{a}_3 k^4 + \text{etc.}$$

Dans les secoods membres des équations (1) et (5), comme dans les séries que renferment les formules (64), (65), (66) du §. 3, les coefficients

$$\mathrm{a}_1, \quad \mathrm{a}_2, \quad \mathrm{a}_3, \quad \text{etc.}$$

des puissances ascendantes de k déeroissent tréa rapidement, et la valeur générale de a_n, déterminée par la formule

(6) $$\mathrm{a}_n = \mathrm{S}\, \frac{m r^{2n-1} \cos^{2n} \alpha}{1.2.3\ldots 2n} \left[\mathrm{f}(r) + \frac{1}{2n+1} f(r) \cos^2 \alpha \right],$$

est une quantité tres pétite de l'ordre $2n - 1$, dans le cas ou la distanee r de deux molécules d'éther, assez rapprochées pour éxércer l'une sur l'autre une action sensible, est considerée comme très petite du premier ordre. Ajoutons que, si un rayon d'une couleur déterminée se réfracte en passant d'un premier milieu dans un second, la nature de la couleur et par suite chacune des quantités T, s, restera invariable, tandis que les quantités

$$k, \quad \Omega, \quad l$$

se changeront dans les suivantes

(7) $k' = \theta k$ (8) $\Omega' = \dfrac{\Omega}{\theta}$ (9) $l' = \dfrac{l}{\theta}$,

θ désignant l'indice de réfraction. Alors aussi les coefficients

$$\mathrm{a}_1, \quad \mathrm{a}_2, \quad \mathrm{a}_3, \quad \text{etc.}$$

obtiendront des valeurs différentes dans le premier et dans le second milieu.

Un très habile observateur Frauenhofer a déduit d'expérieoces faites avec beaucoup de soin les indices de réfraction pour sept rayons colorés, correspondants à certaines raies que présente le spectre solaire, et déterminé les diverses valeurs que prennent ces mêmes indices lorsqu'on fait passer les sept rayons de l'air dans des prismes de verre ou de cristal remplis ou entièrement formés de diverses substances liquides ou solides. Les substances employées par Frauenhofer sont l'eau, une solution de potasse, l'huile de térébenthine, trois espèces de crownglass, et quatre espèces de

flintglass. Ajoutons que deux séries d'experiences sont relatives à l'eau, et deux autres à la troisième espèce de flintglass. Le tableau suivant contient le résultat des expériences de Frauenhofer relatives aux sept rayons qu'il a designés par les lettres B, C, D, E, F, G, H. Pour plus de commodité nous représenterons les valeurs de θ correspondantes à ces mêmes rayons par

$$\theta_1, \quad \theta_2, \quad \theta_3, \quad \theta_4, \quad \theta_5, \quad \theta_6, \quad \theta_7.$$

I. TABLEAU.

Indices de réfraction pour les rayons B, C, D, E, F, G, H de Frauenhofer.

Substances réfringentes.		θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7
Eau	1e Série	1,330935	1,331712	1,333577	1,335851	1,337818	1,341293	1,344177
	2e Série	1,330977	1,331709	1,333577	1,335849	1,337788	1,341261	1,344162
Seletien de potasse		1,399629	1,400515	1,402805	1,405632	1,408082	1,412579	1,416368
Huile de Thérébeethine		1,470496	1,471530	1,474434	1,478353	1,481736	1,488198	1,493874
Crownglass	1re espèce	1,524312	1,525299	1,527982	1,531372	1,534337	1,539908	1,554684
	2e espèce	1,525832	1,526849	1,529587	1,533005	1,536052	1,541657	1,546566
	3e espèce	1,554774	1,555933	1,559075	1,563150	1,566741	1,573535	1,579470
Flintglass	1re espèce	1,602042	1,603800	1,608494	1,614532	1,620042	1,630772	1,640373
	2e espèce	1,623570	1,625477	1,630585	1,637356	1,643466	1,655406	1,666072
	3e espèce 1e Série	1,626564	1,628451	1,633666	1,640544	1,646780	1,658849	1,669680
	2e Série	1,626596	1,628469	1,633667	1,640495	1,646756	1,658848	1,669686
	4e espèce	1,627749	1,629681	1,635036	1,642024	1,648260	1,660285	1,671062

D'autres expériences de Frauenhofer déterminent les valeurs de l ou les épaisseurs des ondes dans l'air pour les sept rayons

$$B, \quad C, \quad D, \quad E, \quad F, \quad G, \quad H.$$

Nous désignerons par

$$l_1, \quad l_2, \quad l_3, \quad l_4, \quad l_5, \quad l_6, \quad l_7$$

ces épaisseurs qui dans les expériences de Frauenhofer se trouvent exprimées en cent-millionièmes de pouce. Si on multiplie les nombres que ce physicien a trouvés par

2,7070 afin de réduire les mêmes longueurs en dix-millionièmes de millimètre, et si l'on effectue le calcul par logarithmes, on obtiendra la tableau suivant, dans lequel i désigne un nombre entier.

II. TABLEAU.

Epaisseurs des ondes dans l'air pour les rayons B, C, D, E, F, G, H *de Frauenhofer.*

Valeurs de l_i en cent-millioniėmes de pouce	$i=1$	2	3	4	5	6	7
	2541	2425	2175	1943	1789	1585	1451
Logarithmes décimaux de ces nombres	4050047	3847117	3374593	2884728	2526103	2000293	1616674
Log (2707)	4324883	4324883	4324883	4324883	4324883	4324883	4324883
Sommes	8374930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5941557
l_i en dix-millionième de millimètre	6878	6564	5888	5260	4843	4291	3928

Il suit de la formule (9) qu'étant donnée l'épaisseur l ou l_i des ondes dans l'air pour l'un des rayons B, C, D, E, F, G, H, on obtiendra l'épaisseur des ondes l' ou l'_i, pour le même rayon refracté par l'eau ou par une autre substance, en divisant la première épaisseur par l'indice de réfraction. Cela posé on déduira sans peine des Tableaux 1 et 2 les épaisseurs des ondes correspondantes aux sept rayons et aux diverses substances considerées par Frauenhofer. En effectuant le calcul par Logarithmes et à l'aide des tables de Callet, on obtient les resultats compris dans les tableaux suivants.

III. TABLEAU.

Détermination des logarithmes des indices de réfraction et de leurs compléments.

	Valeurs de i	$i=1$	2	3	4	5	6	7
Eau 1e Série.	θ_i	1,330935	1,331712	1,333577	1,335851	1,337818	1,341293	1,344177
		1241454	1244064	1249930	1257414	1263942	1274935	1284316
		98	33	229	163	33	293	227
		16	7	23	3	26	10	23
	$L(\theta_i)$	1241568	1244104	1250182	1257580	1263971	1275238	1284566
	compl. ou $L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	8758432	8755896	8749818	8742420	8736029	8724762	8715434

Suite de 3. tableau.

Valeurs de i		$i = 1$	2	3	4	5	6	7
Eau 2e Série.	θ_i	1,330977	1,331709	1,333577	1,335849	1,337788	1,341261	1,344162
		1241454 229 23	1241064 29	1249930 229 23	1257414 130 29	1263587 260 26	1274935 195 3	1284316 194 7
	$L(\theta_i)$	1241706	1244093	1250182	1257573	1263873	1275133	1284517
	compl. ou $L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	8758294	8755907	8749818	8712127	8736127	8724867	8715183
Solution de potasse.	θ_i	1,399629	1,400515	1,402805	1,405632	1,408082	1,412579	1,416368
		1460039 62 28	1462831 31 16	1469958 16	1478617 93 6	1486027 217 6	1499885 216 28	1511553 184 25
	$L(\theta_i)$	1460129	1462878	1469974	1478716	1486280	1500129	1511762
	compl. ou $L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	8539871	8537122	8530026	8521284	8513720	8499871	8488238
Huile de thérébenthine.	θ_i	1,470196	1,471530	1,474134	1,478353	1,481736	1,488198	1,493874
		1674355 267 18	1677603 89	1686153 89 12	1697626 147 9	1707603 88 18	1726321 261 23	1742925 201 12
	$L(\theta_i)$	1674640	1677692	1686254	1697782	1707709	1726608	1743141
	compl. ou $L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	8325360	8322308	8313746	8302218	8292291	8273392	8256859
Crownglass 1e espèce.	θ_i	1,524312	1,525299	1,527982	1,531372	1,534337	1,539908	1,544684
		1830704 29 6	1833268 257 26	1840949 228 6	1850603 199 6	1859103 85 20	1874925 23	1888160 226 11
	$L(\theta_i)$	1830739	1833551	1841183	1850808	1859208	1874948	1888397
	compl. ou $L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	8169261	8166449	8158817	8149192	8140792	8125052	8111603

Suite du 3e tableau.

Valeurs de i		$i = 1$	2	3	4	5	6	7
Crownglass 2e espèce.	θ_i	1,525832	1,528819	1,529387	1,533005	1,536052	1,541657	1,546566
		1834976 86 6	1837822 111 28	1845195 228 20	1855122 11	1863912 142 6	1879717 141 20	1893199 169 17
	$L(\theta_i)$	1835068	1837962	1845713	1855436	1864060	1879878	1893685
	compl. ou $L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	8164932	8162038	8154257	8144591	8135940	8120122	8106315
Crownglass 3e espèce.	θ_i	1,554771	1,555933	1,559075	1,563150	1,566711	1,573535	1,579470
		1916469 196 11	1919817 84 8	1928161 196 11	1939868 139	1949858 111 3	1968667 83 14	1984921 193
	$L(\theta_i)$	1916673	1919909	1928671	1940007	1949972	1968764	1985114
	compl. ou $L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	8083329	8080091	8071329	8059993	8050028	8031236	801188
Flintglass 1re espèce.	θ_i	1,602012	1,603800	1,608491	1,614532	1,620012	1,630772	1,640373
		2046625 109 5	2054502	2063944 241 11	2080380 81 5	2095150 107 5	2123741 187 5	2149233 186 8
	$L(\theta_i)$	2046739	2054502	2064199	2080166	2095262	2123933	2149427
	compl. ou $L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	7953261	7918498	7935801	7919531	7901738	7876067	7850573
Flintglass 2e espèce.	θ_i	1,923570	1,925477	1,630585	1,637356	1,943166	1,655106	1,696072
		2104523 188	2109603 188 19	2123208 214 13	2141283 133 19	2157433 159 16	2189030 16	2216750 183 5
	$L(\theta_i)$	2104711	2109810	2123435	2141432	2157608	2189046	2216938
	compl. ou $L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	7895289	7890190	7876565	7858568	7842392	7810954	7783062

Suite du 3e tableau.

	Valeurs de i	$i = 1$	2	3	4	5	6	7
Flintglass 3e espèce. 1re Série.	θ_i	1,626564	1,628451	1,633666	1,640544	1,646780	1,658819	1,669680
		2112541 161 11	2117611 134 3	2131457 160 16	2149762 106 11	2166145 212	2197940 105 24	2226124 209
	$L(\theta_i)$	2112713	2117748	2131633	2149879	2166357	2198069	2226333
	compl. ou $L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	7887287	7882252	7868367	7850121	7833643	7801931	7773667
Flintglass 3e espèce. 2e Série.	θ_i	1,626596	1,628469	1,633667	1,640193	1,646756	1,658848	1,669686
		2112511 211 16	2117611 160 24	2131457 160 19	2149498 239 13	2166145 132 16	2197940 105 21	2226124 209 16
	$L(\theta_i)$	2112798	2117795	2131636	2149750	2166293	2198066	2226349
	compl. ou $L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	7887202	7882205	7868364	7850250	7833707	7801934	7773651
Flintglass 4e espèce.	θ_i	1,627749	1,629681	1,635036	1,642024	1,648260	1,660285	1,671062
		2115744 107 24	2120810 214 3	2135178 80 16	2153732 53 11	2170099 158	2201604 210 13	2229764 157 5
	$L(\theta_i)$	2115875	2121027	2135274	2153796	2170257	2201827	2229926
	compl. ou $L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	7884125	7878973	7864726	7846204	7829743	7798173	7770074

IV. TABLEAU.

Détermination des épaisseurs des ondes dans les diverses substances, ces épaisseurs étant exprimées en dix-millionièmes de millimètre.

	Valeurs de i	$i = 1$	2	3	4	5	6	7
Eau 1e Série.	$L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	8758132	8755896	8749818	8742420	8736029	8724762	8715434
	$L(l_i)$	8374930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5911557
	Somme	7133362	6927896	6449294	5952031	5587015	5049938	4636991
	épaisseur $l_i' = \frac{l_i}{\theta_i}$	5168	4929	4415	3937	3620	3199	2922

Suite du 4e tableau.

Valeurs de i		$i=1$	2	3	4	5	6	7
Eau 2e Série.	$L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	8758294	8755907	8749818	8742127	8736127	8724867	8715485
	$L(l_i)$	8374930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5911557
	Somme	7133224	6927907	6449294	5952038	5587113	5050013	1637010
	épaisseur $l_i' = \frac{l_i}{\theta_i}$	5168	1929	4415	3937	3620	3199	2922
Solution de potasse.	$L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	8539871	8537122	8530026	8521281	8513720	8199871	8188238
	$L(l_i)$	8374930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5911557
	Somme	6914801	6709122	6229502	5730895	5364706	4825017	4129795
	épaisseur $l_i' = \frac{l_i}{\theta_i}$	4915	4687	4197	3742	3139	3037	2773
Huile de thérében-thine.	$L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	8325360	8322308	8313746	8302218	8292291	8273392	8256859
	$L(l_i)$	8374930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5911557
	Somme	6700290	6494308	6013222	5511829	5143277	4598568	4198416
	épaisseur $l_i' = \frac{l_i}{\theta_i}$	4678	4461	3993	3558	3268	2883	2629
Crownglass 1re espèce.	$L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	8169261	8166119	8158817	8149192	8140792	8125052	8111603
	$L(l_i)$	8371930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5941557
	Somme	6541191	6338119	5858293	5358803	1991778	4450228	4053160
	épaisseur $l_i' = \frac{l_i}{\theta_i}$	4513	4301	3853	3435	3156	2786	2513
Crownglass 2e espèce.	$L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	8161932	8162038	8154257	8141561	8135940	8120122	8106315
	$L(l_i)$	8374930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5941537
	Somme	6539862	6334038	5853733	5351175	4986926	4445298	4017872
	épaisseur $l_i' = \frac{l_i}{\theta_i}$	4508	4299	3849	3131	3153	2733	2510
Crownglass 3e espèce.	$L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	8083326	8080091	8071329	8059993	8050028	8031236	8014886
	$L(l_i)$	8371930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5911557
	Somme	6458236	6252091	5770805	5269601	4901014	4356412	3956443
	épaisseur $l_i' = \frac{l_i}{\theta_i}$	4121	4219	3776	3365	3091	2727	2487

Suite du 4e tableau.

Valeurs de i		$i=1$	2	3	4	5	6	7
Flintglass 1re espèce.	$L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	7953261	7918498	7935804	7919534	7904738	7876067	7850573
	$L(l_i)$	8374930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5941557
	Somme	6328191	6120498	5635280	5129145	4755724	4201243	3792130
	épaisseur $l_i' = \frac{l_i}{\theta_i}$	4294	4093	3660	3258	2959	2631	2394
Flintglass 2e espèce.	$L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	7895289	7890190	7876565	7858568	7842392	7810954	7783062
	$L(l_i)$	8371930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5941557
	Somme	6270219	6062190	5576041	5068179	4693378	4136130	3724619
	épaisseur $l_i' = \frac{l_i}{\theta_i}$	4237	4038	3611	3212	2947	2592	2358
Flintglass 3e espèce. 1re Série.	$L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	7887287	7882252	7868367	7850121	7833643	7801931	7773667
	$L(l_i)$	8374930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5941557
	Somme	6262217	6054252	5567843	5059732	4684629	4127107	3715224
	épaisseur $l_i' = \frac{l_i}{\theta_i}$	4229	4031	3604	3206	2911	2586	2352
Flintglass 3e espèce. 2e Série.	$L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	7887202	7882205	7868364	7850250	7838707	7801934	7773651
	$L(l_i)$	8374930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5941557
	Somme	6262132	6054205	5567840	5059861	4684693	4127110	3715208
	épaisseur $l_i' = \frac{l_i}{\theta_i}$	4229	4031	3601	3206	2941	2586	2352
Flintglass 4e espèce.	$L\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$	7884125	7878973	7861726	7846204	7829743	7798173	7770074
	$L(l_i)$	8371930	8172000	7699476	7209611	6850986	6325176	5941557
	Somme	6259055	6050973	5561202	5055815	4680729	4123349	3711631
	épaisseur $l_i' = \frac{l_i}{\theta_i}$	4226	4028	3601	3203	2938	2584	2351

En resumé, les épaisseurs des ondes dans l'air et les autres substances etant exprimées en dix millionièmes de millimètre, ces épaisseurs seront, d'aprés les experiences de Frauenhofer, représentées par les nombres que renferme le tableau ci joint.

V. TABLEAU.

Epaisseurs des ondes, en dix-millionièmes de millimètre.

Valeurs de i	$i = 1$	2	3	4	5	6	7
l_i .... Air	6878	6564	5888	5260	4843	4291	3928
l_i' .... Eau	5168	4929	4415	3937	3620	3199	2922
.... Solution de potasse	4915	4687	4197	3742	3439	3037	2773
.... huile de thérébenthine	4678	4461	3993	3558	3268	2883	2629
.... crownglass 1er espèce	4513	4304	3853	3435	3156	2786	2543
2e espèce	4508	4299	3849	3431	3153	2783	2540
3e espèce	4424	4219	3776	3365	3091	2727	2487
.... flintglass 1er espèce	4294	4093	3660	3258	2989	2631	2394
2e espèce	4237	4038	3611	3212	2947	2592	2358
3e espèce	4229	4031	3604	3206	2941	2586	2352
4e espèce	4226	4028	3601	3203	2938	2584	2351

Il est important d'observer qu'en appliquant à l'équation (1) le théorème de Lagrange sur le retour des suites, on en tire la valeur de k^2 developpée en une série de la forme

(9) $$k^2 = b_1 s^2 + b_2 s^4 + b_3 s^6 + \text{etc.}$$

D'ailleurs pour déterminer les coefficients $b_1, b_2, b_3, \ldots$ il suffira de substituer dans l'équation (9) les valeurs de $s^2, s^4, s^6, \ldots$ etc. déduites de l'équation (1), savoir

$$s^2 = a_1 k^2 + a_2 k^4 + a_3 k^6 + \text{etc.},$$
$$s^4 = a_1^2 k^4 + 2 a_1 a_2 k^6 + \text{etc.},$$
$$s^6 = a_1^3 k^6 + \text{etc.},$$
etc.

Alors l'équation (9) deviendra

$$k^2 = a_1 b_1 k^2 + (a_2 b_1 + a_1^2 b_2) k^4 + (a_3 b_1 + 2a_1 a_2 b_2 + a_1^3 b_3) k^6 + \text{etc.} \ldots,$$

et l'on en conclura

$$a_1 b_1 = 1,$$
$$a_2 b_1 + a_1^2 b_2 = 0,$$
$$a_3 b_1 + 2a_1 a_2 b_2 + a_1^3 b_3 = 0,$$
etc.

parconséquent

$$
(10) \qquad \left\{ \begin{array}{l}
b_1 = \dfrac{1}{a_1}, \\[2ex]
b_2 = -\dfrac{a_2 b_1}{a_1^2} = -\dfrac{a_2}{a_1^3}, \\[2ex]
b_3 = -\dfrac{a_3 b_1 + 2a_1 a_2 b_2}{a_1^2} = -\dfrac{a_1 a_3 - 2a_2^2}{a_1^5}, \\[2ex]
\text{etc.}
\end{array} \right.
$$

Cela posé, la formule (9) donnera

$$
(11) \qquad a_1 k^2 = s^2 - \frac{a_2}{a_1^2} s^4 - \frac{a_1 a_3 - 2a_2^2}{a_1^4} s^6 - \text{etc.}
$$

Or, puisque, dans le cas où la distance r de deux molécules assez rapprochées pour exercer une action sensible l'une sur l'autre est considérée comme très petite du premier ordre, les quantités

$$
a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots
$$

sont des quantités très petites du premier, du troisième, du cinquième . . . ordre, il est clair que dans le même cas les quantités

$$
\frac{a_2}{a_1^3}, \quad \frac{a_3}{a_1^5}, \quad \text{etc.}
$$

et par suite les coefficients de s^4, s^6, . . . dans le second membre de la formule (11), seront des quantités très petites du premier, du second ordre etc. . . . Donc ces coefficients décroîtront très rapidement aussi bien que les coefficients de s^2, s^4, s^6, etc. dans le second membre de la formule (9).

Si dans le second membre de l'équation (1) on conserve seulement le premier, les deux premiers, le trois premiers termes, etc. . . , on obtiendra diverses valeurs approchées de s^2, savoir

$$
(12) \qquad s^2 = a_1 k^2,
$$

$$
(13) \qquad s^2 = a_1 k^2 + a_2 k^4,
$$

$$
(14) \qquad s^2 = a_1 k^2 + a_2 k^4 + a_3 k^6,
$$

etc.

et si l'on substitue la premiere de ces valeurs approchées dans les différents termes qui composent le second membre de la formule (11), ces différents termes deviendront

(15) $$a_1 k^2, \quad -a_2 k^4, \quad -\left(a_3 - \frac{2a_2^2}{a_1}\right) k^6, \text{ etc.}$$

Or, les coefficients des puissances successives de k^2 étant du même ordre dans la série (15) et dans celle que renferme l'équation (1), il est naturel d'en conclure qu'on obtient le même degré d'approximation lorsque dans les second membres des équations (1) et (11) l'on conserve le même nombre de termes. En conséquence aux formules (12), (13), (14) etc. doivent correspondre les suivantes

(16) $$k^2 = \frac{1}{a_1} s^2,$$

(17) $$k^2 = \frac{1}{a_1} s^2 - \frac{a_2}{a_1^3} s^4,$$

(18) $$k^2 = \frac{1}{a_1} s^2 - \frac{a_2}{a_1^3} s^4 - \frac{a_1 a_3 - 2a_2^2}{a_1^5} s^6,$$

etc.

qu'on peut encore ecrire comme il suit

(19) $$k^2 = b_1 s^2,$$

(20) $$k^2 = b_1 s^2 + b_2 s^4,$$

(21) $$k^2 = b_1 s^2 + b_2 s^4 + b_3 s^6,$$

etc.

C'est au reste ce qu'il est facile de vérifier a posteriori. En effet la formule (11) entraine immédiatement la formule (16). Pareillement la formule (13) s'accorde avec la formule (17) de laquelle on tire

(22) $$s^2 = \frac{1}{2}\frac{a_1^2}{a_2} - \sqrt{\left\{\left(\frac{1}{2}\frac{a_1^2}{a_2}\right)^2 - \frac{a_1^3}{a_2} k^2\right\}},$$

ou, ce qui revient au même,

(23) $$s^2 = a_1^2 \frac{1 - \sqrt{\left\{1 - 4\frac{a_2^2}{a_1} k^2\right\}}}{2a_2} = a_1 k^2 + a_2 k^4 + 2\frac{a_2^2}{a_1} k^6 + 5\frac{a_2^3}{a_1^2} k^8 + \text{etc.}$$

et par conséquent

$$s^2 = a_1 k^2 + a_2 k^4,$$

en négligeant les termes

$$2\frac{a_2^2}{a_1}k^8, \qquad 5\frac{a_2^3}{a_1^2}k^8, \qquad \text{etc.}$$

Or ces derniers sont respectivement comparables pour leur petitesse aux termes

$$a_3 k^8, \quad a_4 k^8, \quad \text{etc.}$$

que l'on a negligés dans le second membre de l'équation (1) pour réduire cette dernière à la formule (13), puisque les quantites

$$2\frac{a_2^2}{a_1}, \quad 5\frac{a_2^3}{a_1^2}, \quad \text{etc.}$$

sont respectivement du cinquième, du 7ᵉ ordre, etc. . . . aussi bien que les quantités

$$a_3, \quad a_4, \quad \text{etc.}$$

On prouverait par des raisonnements semblables que la formule (14) s'accorde avec la formule (18), etc. . . . Cherchons maintenant jusqu'où les expériences de Frauenhofer permettent de pousser le dégré d'approximation, c'est à dire, combien de termes ces expériences permettent de conserver dans l'équation (1), ou, ce qui revient au même, dans la formule (11).

Lorsque dans la formule (11) on écrit s_n et k_n au lieu de s et k, on en tire

(24) $$k_n^2 = b_1 s_n^2 + b_2 s_n^4 + b_3 s_n^6 + \text{etc.},$$

puis, en posant successivement $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc. . . . ,

(25) $$\left\{\begin{array}{l} k_1^2 = b_1 s_1^2 + b_2 s_1^4 + b_3 s_1^6 + \ldots \\ k_2^2 = b_1 s_2^2 + b_2 s_2^4 + b_3 s_2^6 + \ldots \\ k_3^2 = b_4 s_3^2 + b_2 s_3^4 + b_3 s_3^6 + \ldots \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

Or, si dans le second membre de la formule (11), ou (24), on conserve seulement un, deux, trois . . . termes, on pourra en eliminer le coefficient b_1, ou les deux coefficients b_1, b_2, ou les trois coefficients b_1, b_2, b_3; etc. à l'aide de la première, ou des deux premières, ou des trois premières, etc. . . . des formules (25), et l'on trouvera dans le premier cas

(26) $$k_n^2 = \frac{s_n^2}{s_1^2} k_1^2,$$

dans le second cas

(27) $$k_n^2 = \frac{s_n^2 - s_2^2}{s_1^2 - s_2^2}\frac{s_n^2}{s_1^2}k_1^2 + \frac{s_n^2 - s_1^2}{s_2^2 - s_1^2}\frac{s_n^2}{s_2^2}k_2^2,$$

dans le troisième cas

$$(28)\quad k_n^2=\frac{(s_n^2-s_2^2)(s_n^2-s_3^2)}{(s_1^2-s_2^2)(s_1^2-s_3^2)}\frac{s_n^2}{s_1^2}k_1^2+\frac{(s_n^2-s_3^2)(s_n^2-s_1^2)}{(s_2^2-s_3^2)(s_2^2-s_1^2)}\frac{s_n^2}{s_2^2}k_2^2+\frac{(s_n^2-s_1^2)(s_n^2-s_2^2)}{(s_3^2-s_1^2)(s_3^2-s_2^2)}\frac{s_n^2}{s_3^2}k_3^2,$$

etc.

Il est bon d'observer, qu'on peut déduire directement les équations (26), (27), (28) de la formule de Lagrange pour l'interpolation, en considérant

$$\frac{k^2}{s^2}$$

comme une fonction entière de s^2, dont le degré soit l'un des nombres $0, 1, 2$, etc. Ajoutons que la formule (26), si l'on y pose $n=2$, la formule (27), si l'on y pose $n=3$, la formule (28), si l'on y pose $n=4$, etc. . . . pourront s'écrire comme il suit

$$(29)\qquad \frac{k_1^2}{s_1^2(s_1^2-s_2^2)}+\frac{k_2^2}{s_2^2(s_2^2-s_1^2)}=0,$$

$$(30)\quad \frac{k_1^2}{s_1^2(s_1^2-s_2^2)(s_1^2-s_3^2)}+\frac{k_2^2}{s_2^2(s_2^2-s_1^2)(s_2^2-s_3^2)}+\frac{k_3^2}{s_3^2(s_3^2-s_1^2)(s_3^2-s_2^2)}=0,$$

$$(31)\quad \frac{k_1^2}{s_1^2(s_1^2-s_2^2)(s_1^2-s_3^2)(s_1^2-s_4^2)}+\frac{k_2^2}{s_2^2(s_2^2-s_1^2)(s_2^2-s_3^2)(s_2^2-s_4^2)}+\frac{k_3^2}{s_3^2(s_3^2-s_1^2)(s_3^2-s_2^2)(s_3^2-s_4^2)}$$
$$+\frac{k_4^2}{s_4^2(s_4^2-s_1^2)(s_4^2-s_2^2)(s_4^2-s_3^2)}=0,$$

etc.

Généralement, si l'on conservait $n-1$ termes dans le second membre de l'équation (24), on tirerait de cette équation, ou, ce qui revient au même, des équations (25)

$$(32)\quad \frac{k_1^2}{s_1^2(s_1^2-s_2^2)(s_1^2-s_3^2)\dots(s_1^2-s_n^2)}+\frac{k_2^2}{s_2^2(s_2^2-s_1^2)(s_2^2-s_3^2)\dots(s_2^2-s_n^2)}+\dots$$
$$\dots+\frac{k_n^2}{s_n^2(s_n^2-s_1^2)(s_n^2-s_2^2)\dots(s_n^2-s_{n-1}^2)}=0;$$

ce que l'on peut démontrer directement comme il suit.

En désignant par i un nombre entier inférieur à n, on tire de la formule d'interpolation, ou bien encore de la formule relative à la décomposition des fractions rationelles

$$(33)\quad s^{2i}=\frac{(s^2-s_2^2)(s^2-s_3^2)\dots(s^2-s_n^2)}{(s_1^2-s_2^2)(s_1^2-s_3^2)\dots(s_1^2-s_n^2)}s_1^{2i}+\frac{(s^2-s_1^2)(s^2-s_3^2)\dots(s^2-s_n^2)}{(s_2^2-s_1^2)(s_2^2-s_3^2)\dots(s_2^2-s_n^2)}s_2^{2i}+\dots$$
$$\dots+\frac{(s^2-s_1^2)(s^2-s_2^2)\dots(s^2-s_{n-1}^2)}{(s_n^2-s_1^2)(s_n^2-s_2^2)\dots(s_n^2-s_{n-1}^2)}s_n^{2i};$$

puis, en égalant entre eux les coefficients de s^{2n-2} dans les deux membres de l'équation (33), on en conclut 1° pour $i<n-1$

$$(34)\quad 0 = \frac{s_1^{2i}}{(s_1^2-s_2^2)(s_1^2-s_3^2)\dots(s_1^2-s_n^2)} + \frac{s_2^{2i}}{(s_2^2-s_1^2)(s_2^2-s_3^2)\dots(s_2^2-s_n^2)} + \dots$$
$$\dots + \frac{s_n^{2i}}{(s_n^2-s_1^2)(s_n^2-s_2^2)\dots\dots(s_n^2-s_{n-1}^2)},$$

2° pour $i = n-1$

$$(35)\quad 1 = \frac{s_1^{2(n-1)}}{(s_1^2-s_2^2)(s_1^2-s_3^2)\dots(s_1^2-s_n^2)} + \frac{s_2^{2(n-1)}}{(s_2^2-s_1^2)(s_2^2-s_3^2)\dots(s_2^2-s_n^2)} + \dots$$
$$\dots + \frac{s_n^{2(n-1)}}{(s_n^2-s_1^2)(s_n^2-s_2^2)\dots\dots(s_n^2-s_{n-1}^2)}.$$

Or, si l'on a egard aux formules (34), (35), les n prémières des formules (25), respectivement multipliées par le coefficients

$$\frac{1}{s_1^2(s_1^2-s_2^2)(s_1^2-s_3^2)\dots(s_1^2-s_n^2)},\ \frac{1}{s_2^2(s_2^2-s_1^2)(s_2^2-s_3^2)\dots(s_2^2-s_n^2)},\dots\frac{1}{s_n^2(s_n^2-s_1^2)(s_n^2-s_2^2)\dots\dots(s_n^2-s_{n-1}^2)},$$

puis combinées entre elles par voie d'addition, donneront

$$(36)\quad \frac{k_1^2}{s_1^2(s_1^2-s_2^2)(s_1^2-s_3^2)\dots(s_1^2-s_n^2)} + \frac{k_2^2}{s_2^2(s_2^2-s_1^2)(s_2^2-s_3^2)\dots(s_2^2-s_n^2)} + \dots$$
$$\dots + \frac{k_n^2}{s_n^2(s_n^2-s_1^2)(s_n^2-s_2^2)\dots\dots(s_n^2-s_{n-1}^2)} = b_n + \text{etc.}\dots,$$

et il est clair que cette dernière équation se réduira simplement à la formule (32), si, dans le second membre de la formule (24), par conséquent de chacune des formules (25), on conserve seulement les $n-1$ premiers termes, ce qui revient à poser

$$b_n = 0, \qquad b_{n+1} = 0, \qquad \text{etc.}$$

Lorsqu'on passe de l'air à un autre milieu, la quantité k doit etre remplacée par

$$k' = \theta k$$

dans l'équation (32) qui se change alors en cette autre formule

$$(37)\quad \frac{\theta_1^2 k_1^2}{s_1^2(s_1^2-s_2^2)\dots(s_1^2-s_n^2)} + \frac{\theta_2^2 k_2^2}{s_2^2(s_2^2-s_1^2)(s_2^2-s_3^2)\dots(s_2^2-s_n^2)} + \dots$$
$$\dots + \frac{\theta_n^2 k_n^2}{s_n^2(s_n^2-s_1^2)(s_n^2-s_2^2)\dots\dots(s_n^2-s_{n-1}^2)} = 0.$$

Si d'ailleurs on pose, pour abréger,

$$(38)\quad \begin{cases} K_1 = \dfrac{k_1^2}{s_1^2(s_1^2-s_2^2)(s_1^2-s_3^2)\ldots(s_1^2-s_n^2)}, \quad K_2 = \dfrac{k_2^2}{s_2^2(s_2^2-s_1^2)(s_2^2-s_3^2)\ldots(s_2^2-s_n^2)}, \text{ etc.} \ldots \\ \ldots K_n = \dfrac{k_n^2}{s_n^2(s_n^2-s_1^2)(s_n^2-s_2^2)\ldots\ldots(s_n^2-s_{n-1}^2)}, \end{cases}$$

et, si l'on représente les carrés de indices de réfraction par

$$(39)\qquad \Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \Theta_3, \quad \text{etc.}$$

de sorte qu'on ait

$$(40)\qquad \Theta_i = \theta_i^2$$

i désignant un nombre entier quelconque, les formules (32) et (37) deviendront respectivement

$$(41)\qquad K_1 + K_2 + K_3 + \ldots + K_n = 0,$$

$$(42)\qquad K_1\Theta_1 + K_2\Theta_2 + K_3\Theta_3 + \ldots + K_n\Theta_n = 0.$$

Enfin, si l'on passe successivement de l'air à d'autres milieux réfringents des diverses natures, et, si dans ce passage k devient successivement

$$(43)\qquad \theta k, \quad \theta' k, \quad \theta'' k, \quad \text{etc.}$$

alors, au lieu de la formule (41), on obtiendra un système d'équations de la forme

$$(44)\quad \begin{cases} K_1\Theta_1 + K_2\Theta_2 + K_3\Theta_3 + \ldots + K_n\Theta_n = 0, \\ K_1\Theta_1' + K_2\Theta_2' + K_3\Theta_3' + \ldots + K_n\Theta_n' = 0, \\ K_1\Theta_1'' + K_2\Theta_2'' + K_3\Theta_3'' + \ldots + K_n\Theta_n'' = 0, \\ \text{etc.} \ldots \end{cases}$$

pourvu que l'on pose

$$(45)\qquad \Theta_i = \theta_i^2, \quad \Theta_i' = \theta_i'^2, \quad \Theta_i'' = \theta_i''^2, \quad \text{etc.}$$

c'est-à-dire, pourvu que l'on designe par

$$(46)\qquad \Theta_i, \quad \Theta_i', \quad \Theta_i'', \quad \text{etc.}$$

les carrés des indices de réfraction relatifs aux divers milieux dont il s'agit. On ne saurait, dans les formules (41), (42), (44), supposer $n = 2$: car alors les formules (41), (42), réduites à

$$K_1 + K_2 = 0, \quad K_1\Theta_1 + K_2\Theta_2 = 0,$$

donneraient simplement $\Theta_1 = \Theta_2$ et par suite la dispersion cesserait d'avoir lieu. On aura donc au moins $n = 3$. Ajoutons qu'il suffira d'éliminer les quantités

$$K_1, \quad K_2, \quad K_3, \ldots K_n,$$

ou plutôt les rapports

$$\frac{K_1}{K_n}, \quad \frac{K_2}{K_n}, \ldots \frac{K_{n-1}}{K_n},$$

entre l'équation (42) et $n-1$ des équations (44), pour obtenir, entre les valeurs de

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \ldots \Theta_n$$

relatives à $n-1$ substances diverses, une équation de condition qui devra être sensiblement vérifiée, lorsqu'on pourra sans erreur sensible réduire à ses $n-1$ premiers termes la série comprise dans le second membre de la formule (9) ou (24).

Cela posé, en attribuant successivement à n les valeurs entières et croissantes 3, 4, etc...., on pourrait chercher la première de ces valeurs pour laquelle se vérifient sans erreur sensible les équations de condition du genre de celles que nous venons de mentionner, et décider ainsi jusqu'où les expériences de Frauenhofer permettent de pousser le degré d'approximation. Mais on arrivera plus promptement au même but à l'aide des considérations suivantes.

La formule (42) détermine Θ_n en fonction linéaire de seules quantités

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \ldots \Theta_{n-1}.$$

Des formules semblables détermineraient Θ_{n+1}, Θ_{n+2}, etc. en fonctions lineaires des mêmes quantités; et généralement le caractère propre d'une valeur de n assez considérable, pour qu'on puisse sans erreur sensible réduire la série (9) ou (24) à ses $n-1$ prémiers termes, c'est que n des quantités

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \Theta_3, \quad \Theta_4, \quad \text{etc.}$$

seront toujours liées entre elles par une équation linéaire sans terme constant, et dans laquelle les coefficients resteront indépendants de la nature du milieu réfringent.

Concevons maintenant que par les notations

(47) $$S\Theta_i, \quad S'\Theta_i, \quad S''\Theta_i, \quad \text{etc.}$$

on désigne plusieurs des polynomes contenus dans la formule générale

(48) $$\pm\Theta_1 \pm \Theta_2 + \Theta_3 \pm \text{etc.}\ldots.,$$

c'est à dire autant de sommes des quantités

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \Theta_3, \quad \text{etc.}\ldots.$$

prises tantôt avec le signe +, tantôt avec le signe —; de sorte qu'en appliquant le calcul aux expériences de Frauenhofer faites sur sept rayons l'on ait par exemple

(49)
$$\left\{\begin{array}{l} S\ \Theta_i = \quad \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 + \Theta_5 + \Theta_6 + \Theta_7, \\ S'\ \Theta_i = \quad \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 - \Theta_5 - \Theta_6 - \Theta_7, \\ S''\Theta_i = -\Theta_1 - \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 + \Theta_5 + \Theta_6 - \Theta_7, \\ S'''\Theta_i = -\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 - \Theta_4 - \Theta_5 \pm \Theta_6 + \Theta_7 \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

Représentons au contraire par les notations

(50)
$$\Sigma\Theta_i, \quad \Sigma\Theta_i', \quad \Sigma''\Theta_i, \quad \text{etc.....}$$

plusieurs des polynomes compris dans la formule générale

(51)
$$\pm\,\Theta_i \pm \Theta_i' \pm \Theta_i'' \pm \text{etc....},$$

c'est à dire, autant de sommes formées avec les diverses valeurs de

$$\Theta_i$$

correspondantes à une même valeur de i, mais relatives aux diverses substances, et concevons par exemple que

$$\Sigma\Theta_1, \quad \Sigma\Theta_2, \ldots\ldots \Sigma\Theta_i$$

représentent les sommes des valeurs de

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \ldots\ldots \Theta_i$$

relatives à toutes les substances, que

$$\Sigma'\Theta_1, \quad \Sigma'\Theta_2, \ldots\ldots \Sigma'\Theta_i$$

représentent ce que deviennent les précédentes sommes, quand on y change les signes des termes relatifs aux diverses espèces de flintglass, etc. .... Enfin décomposons Θ_i en diverses parties représentées par

$$\vartheta_i, \quad \vartheta_i', \quad \vartheta_i'', \quad \text{etc. . . .}$$

ensorte qu'on ait

$$\Theta_i = \vartheta_i + \vartheta_i' + \vartheta_i'' + \text{etc. . . .}$$

En admettant que les lettres caractéristiques S, S', ... Σ, Σ', ... appliquées séparément ou simultanément à ces diverses parties gardent les mêmes significations que lorsqu'on les applique à Θ_i, et indiquent toujours des sommes formées de la même manière ; on aura encore

$$(53)\quad \begin{cases} S\Theta_i = S\vartheta_i + S\vartheta_i' + S\vartheta_i'' + \text{etc.}\dots, \\ S'\Theta_i = S'\vartheta_i + S'\vartheta_i' + S'\vartheta_i'' + \text{etc.}\dots, \\ \text{etc.}\dots \end{cases}$$

$$(54)\quad \begin{cases} \Sigma\,\Theta_i = \Sigma\,\vartheta_i + \Sigma\,\vartheta_i' + \Sigma\,\vartheta_i'' + \text{etc.}\dots, \\ \Sigma'\Theta_i = \Sigma'\vartheta_i + \Sigma'\vartheta_i' + \Sigma'\vartheta_i'' + \text{etc.}\dots, \\ \text{etc.}\dots \end{cases}$$

$$(55)\quad \begin{cases} \Sigma S\Theta_i = \Sigma S\vartheta_i + \Sigma S\vartheta_i' + \Sigma S\vartheta_i'' + \text{etc.}\dots, \\ \text{etc.}\dots \end{cases}$$

Cela posé, revenons à la formule (42), et voyons dabord quelles conséquences on aurait pu déduire de cette formule et autres semblables, s'il eût éte permis d'y supposer $n = 2$. Dans cette hypothèse de l'équation (42) réduite à

$$(56)\qquad K_1\Theta_1 + K_2\Theta_2 = 0,$$

on aurait tiré

$$\frac{\Theta_1}{\Theta_2} = -\frac{K_2}{K_1},$$

puis, en remplaçant le premier des milieux réfringents par le second,

$$\frac{\Theta'_1}{\Theta'_2} = -\frac{K_2}{K_1},$$

et par conséquent

$$(57)\qquad \frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \frac{\Theta'_1}{\Theta'_2},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\Theta_1}{\Theta'_1} = \frac{\Theta_2}{\Theta'_2}.$$

On aurait trouvé de la même manière

$$\frac{\Theta_1}{\Theta'_1} = \frac{\Theta_3}{\Theta'_3},$$

$$\frac{\Theta_1}{\Theta'_1} = \frac{\Theta_4}{\Theta'_4},$$

etc. . . . . ,

et finalement

$$(58)\qquad \frac{\Theta_1}{\Theta'_1}=\frac{\Theta_2}{\Theta'_2}=\frac{\Theta_3}{\Theta'_3}=\frac{\Theta_4}{\Theta'_4}=\frac{\Theta_5}{\Theta'_5}=\frac{\Theta_6}{\Theta'_6}=\frac{\Theta_7}{\Theta'_7}.$$

Or plusieurs fractions égales entre elles sont encore égales à celle qu'on obtient en divisant la somme de leurs numérateurs ajoutés les uns aux autres, ou pris les uns avec le signe $+$ les autres avec le signe $-$, par la somme de leurs dénominateurs ajoutés pareillement les uns aux autres ou pris avec les mêmes signes que les numérateurs. Donc la formule (58) entraînerait la suivante

$$(59)\qquad \frac{\Theta_1}{\Theta'_1}=\frac{S\Theta_i}{S\Theta'_i},$$

qu'on peut écrire comme il suit

$$(60)\qquad \frac{\Theta_1}{S\Theta_i}=\frac{\Theta'_1}{S\Theta'_i},$$

et dans laquelle il est permis de remplacer la caractéristique S par l'une des caractéristiques S', S'', etc. .... Observons d'ailleurs que, si l'on pouvait considérer comme égaux les rapports compris dans la formule (58), et attribuer les différences de leurs valeurs réduites en nombres aux erreurs d'observation, le moyen d'atténuer l'influence probable de ces erreurs sur la détermination de la valeur commune des rapports dont il s'agit serait de faire concourir également à cette détermination les carrés des sept indices de réfraction, et par conséquent de substituer le nouveau rapport

$$(61)\qquad \frac{S\Theta_i}{S\Theta'_i}=\frac{\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3+\Theta_4+\Theta_5+\Theta_6+\Theta_7}{\Theta'_1+\Theta'_2+\Theta'_3+\Theta'_4+\Theta'_5+\Theta'_6+\Theta'_7}$$

à tous les autres, attendu que les deux termes de ce nouveau rapport seraient sept fois plus grands que les moyennes arithmétiques entre les termes correspondants des premiers, et que, selon toute apparence, les erreurs d'expérience dans

$$\Theta_1,\ \Theta_2,\ \Theta_3,\ \Theta_4,\ \Theta_5,\ \Theta_6,\ \Theta_7$$

étant les unes positives les autres négatives, produiraient dans le polynome

$$\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3+\Theta_4+\Theta_5+\Theta_6+\Theta_7$$

une erreur de beaucoup inférieure à la somme de leurs valeurs numériques, ou ce qui revient au même, à sept fois la moyenne arithmétique entre ces valeurs.

Si le second des milieux réfringents était remplacé successivement par le troisième, par le quatrième, etc. ... alors, au lieu de la formule (70) on obtiendrait les suivantes

$$\frac{\Theta_1}{S\Theta_i}=\frac{\Theta''_1}{S\Theta''_i},$$

$$\frac{\Theta_1}{S\Theta_i}=\frac{\Theta'''_1}{S\Theta'''_i},$$

etc. ....

On aurait donc généralement dans l'hypothèse admise

$$(62) \qquad \frac{\Theta_1}{S\Theta_i} = \frac{\Theta_1'}{S\Theta_i'} = \frac{\Theta_1''}{S\Theta_i''} = \frac{\Theta_1'''}{S\Theta_i'''} = \text{etc.} \ldots$$

On le moyen d'atténuer l'influence probable des erreurs d'observation sur la détermination numérique de la valeur commune des rapports compris dans la formule (62) serait de substituer le nouveau rapport

$$(63) \qquad \frac{\Sigma\Theta_1}{\Sigma S\Theta_i} = \frac{\Theta_1 + \Theta_1' + \Theta_1'' + \Theta_1''' + \text{etc.} \ldots}{S\Theta_i + S\Theta_i' + S\Theta_i'' + S\Theta_i''' + \text{etc.} \ldots}$$

à tous les autres ; ce que l'on prouve par les raisons cidessus alléguées pour la substitution du rapport (61) aux rapports (58). On tire effectivement de la formule (62)

$$(64) \qquad \frac{\Theta_1}{S\Theta_i} = \frac{\Sigma\Theta_1}{\Sigma S\Theta i},$$

ou

$$(65) \qquad \Theta_1 = \frac{\Sigma\Theta_1}{\Sigma S\Theta_i} S\Theta_i.$$

On obtiendrait de la même manière les diverses équations

$$(66) \qquad \begin{cases} \Theta_1 = \dfrac{\Sigma\Theta_1}{\Sigma S\Theta_i} S\Theta_i, \\ \Theta_2 = \dfrac{\Sigma\Theta_2}{\Sigma S\Theta_i} S\Theta_i, \\ \text{etc.} \ldots \\ \Theta_7 = \dfrac{\Sigma\Theta_7}{\Sigma S\Theta_i} S\Theta_i, \end{cases}$$

qui peuvent être remplacées par la seule formule

$$(67) \qquad \frac{\Theta_1}{\Sigma\Theta_1} = \frac{\Theta_2}{\Sigma\Theta_2} = \frac{\Theta_3}{\Sigma\Theta_3} = \frac{\Theta_4}{\Sigma\Theta_4} = \frac{\Theta_5}{\Sigma\Theta_5} = \frac{\Theta_6}{\Sigma\Theta_6} = \frac{\Theta_7}{\Sigma\Theta_7} = \frac{S\Theta_i}{\Sigma S\Theta_i}.$$

Si l'on pouvait en réalité considérer comme égaux les rapports compris dans la formule (58), et attribuer les différences de leurs valeurs réduites en nombres aux erreurs d'observation, alors les valeurs de

$$\Theta_1, \ \Theta_2, \ \Theta_3, \ \Theta_4, \ \Theta_5, \ \Theta_6, \ \Theta_7$$

déterminées par les formules (66) mériteraient plus de confiance que les valeurs observées. Mais il n'en est pas ainsi. Car nous avons vu qu'il n'était pas possible

de supposer $n=2$ dans l'équation (42) et de la réduire ainsi à l'équation (56). En conséquence, les seconds membres des formules (66) doivent être considérés comme représentant non les valeurs exactes, mais seulement des valeurs approchées de

$$\Theta_1,\ \Theta_2,\ \Theta_3,\ \Theta_4,\ \Theta_5,\ \Theta_6,\ \Theta_7.$$

Désignons ces valeurs approchées par

$$\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \vartheta_3,\ \vartheta_4,\ \vartheta_5,\ \vartheta_6,\ \vartheta_7,$$

ensorte qu'on ait

$$(68)\qquad \vartheta_1=\frac{\Sigma\Theta_1}{\Sigma S\Theta_i}S\Theta_i,\quad \vartheta_2=\frac{\Sigma\Theta_2}{\Sigma S\Theta_i}S\Theta_i,\ \text{etc.}\ldots\quad \vartheta_7=\frac{\Sigma\Theta_7}{\Sigma S\Theta_i}S\Theta_i,$$

et par $\Delta\Theta_i$ la valeur de la différence

$$\Theta_i-\vartheta_i,$$

de sorte qu'on ait encore

$$(69)\quad \Theta_1=\vartheta_1+\Delta\Theta_1,\quad \Theta_2=\vartheta_2+\Delta\Theta_2,\quad \text{etc.}\ldots\ldots\quad \Theta_7=\vartheta_7+\Delta\Theta_7.$$

On tirera des équations (68)

$$(70)\qquad \vartheta_1+\vartheta_2+\ldots+\vartheta_7=S\Theta_i=\Theta_1+\Theta_2+\ldots+\Theta_7,$$

et les formules (69), combinées entre elles par voie d'addition, donneront

$$(71)\quad \Delta\Theta_1+\Delta\Theta_2+\Delta\Theta_3+\Delta\Theta_4+\Delta\Theta_5+\Delta\Theta_6+\Delta\Theta_7=0,\quad \text{ou}\quad S\Delta\Theta_i=0.$$

Cela posé, cherchons ce qui arriverait si, dans la formule (42) et autres semblables, on pouvait sans erreur sensible supposer $n=3$. Alors, cette formule, se réduisant à

$$(72)\qquad K_1\Theta_1+K_2\Theta_2+K_3\Theta_3=0,$$

et devant subsister indépendamment de la nature du milieu réfringent, entraînerait la suivante

$$(73)\qquad K_1\Sigma\Theta_1+K_2\Sigma\Theta_2+K_3\Sigma\Theta_3=0,$$

de laquelle on tirerait, en la joignant aux trois premières des équations (68),

$$(74)\qquad K_1\vartheta_1+K_2\vartheta_2+K_3\vartheta_3=0.$$

Or, en substituant dans la formule (72) les valeurs de Θ_1, Θ_2, Θ_3 tirées des équations (69), et ayant égard à la formule (74), on obtiendrait la suivante

$$(75)\qquad K_1\Delta\Theta_1+K_2\Delta\Theta_2+K_3\Delta\Theta_3=0,$$

qui déterminerait $\Delta\Theta_3$ en fonction linéaire des deux quantités $\Delta\Theta_1$, $\Delta\Theta_2$. Des formules semblables détermineraient $\Delta\Theta_4$, $\Delta\Theta_5$, $\Delta\Theta_6$, $\Delta\Theta_7$ en fonctions des mêmes quantités; et la substitution des valeurs de

$$\Delta\Theta_3,\quad \Delta\Theta_4,\quad \Delta\Theta_5,\quad \Delta\Theta_6,\quad \Delta\Theta_7$$

ainsi déterminées dans l'équation (71) fournirait entre les seules quantités $\Delta\Theta_1$, $\Delta\Theta_2$ une équation nouvelle dont les coefficients seraient encore indépendants de la nature du milieu réfringent. On aurait donc, en vertu de cette équation nouvelle, et en désignant par $\Delta\Theta_i'$ ce que devient $\Delta\Theta_i$ quand on passe du premier milieu au second,

(76) $$\frac{\Delta\Theta_1}{\Delta\Theta_2} = \frac{\Delta\Theta_1'}{\Delta\Theta_2'},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\Delta\Theta_1}{\Delta\Theta_1'} = \frac{\Delta\Theta_2}{\Delta\Theta_2'}.$$

On trouverait de la même manière

$$\frac{\Delta\Theta_1}{\Delta\Theta_1'} = \frac{\Delta\Theta_3}{\Delta\Theta_3'},$$

$$\frac{\Delta\Theta_1}{\Delta\Theta_1'} = \frac{\Delta\Theta_4}{\Delta\Theta_4'},$$

etc.

et finalement

(77) $$\frac{\Delta\Theta_1}{\Delta\Theta_1'} = \frac{\Delta\Theta_2}{\Delta\Theta_2'} = \frac{\Delta\Theta_3}{\Delta\Theta_3'} = \frac{\Delta\Theta_4}{\Delta\Theta_4'} = \frac{\Delta\Theta_5}{\Delta\Theta_5'} = \frac{\Delta\Theta_6}{\Delta\Theta_6'} = \frac{\Delta\Theta_7}{\Delta\Theta_7'}.$$

Supposons maintenant que l'on désigne par $S'\Theta_i$ l'un des polynomes compris dans la formule (48), et par $\Sigma\,\Theta_i$ l'un des polynomes compris dans la formule (61), en choisissant les signes de manière que

$$S'\Delta\Theta_i$$

représente, au moins pour l'une des substances, la somme des valeurs numériques de

$$\Delta\Theta_1,\quad \Delta\Theta_2,\quad \Delta\Theta_3,\quad \Delta\Theta_4,\quad \Delta\Theta_5,\quad \Delta\Theta_6,\quad \Delta\Theta_7,$$

et que

$$\Sigma S'\Delta\Theta_i$$

représente la somme des valeurs numériques de

$$S'\Delta\Theta_i,\quad S'\Delta\Theta_i',\quad S'\Delta\Theta_i'',\quad \text{etc.}\ldots\ldots$$

En opérant comme on l'a fait, lorsque de l'équation (58) on a successivement déduit les formules (59), (62), (64), (67), on déduirait de la formule (77) celles qui suivent

(78) $$\frac{\Delta\Theta_1}{\Delta\Theta_1'} = \frac{S'\Delta\Theta_i}{S'\Delta\Theta_i'},$$

(79) $$\frac{\Delta\Theta_1}{S'\Delta\Theta_i} = \frac{\Delta\Theta_1'}{S'\Delta\Theta_i'} = \frac{\Delta\Theta_1''}{S'\Delta\Theta_i''} = \frac{\Delta\Theta_1'''}{S'\Delta\Theta_i'''} = \text{etc.} \dots .$$

(80) $$\frac{\Delta\Theta_1}{S'\Delta\Theta_i} = \frac{\Sigma'\Delta\Theta_i}{\Sigma S'\Delta\Theta_i},$$

(81) $$\frac{\Delta\Theta_1}{\Sigma'\Delta\Theta_1} = \frac{\Delta\Theta_2}{\Sigma'\Delta\Theta_2} = \frac{\Delta\Theta_3}{\Sigma'\Delta\Theta_3} = \frac{\Delta\Theta_4}{\Sigma'\Delta\Theta_4} = \frac{\Delta\Theta_5}{\Sigma'\Delta\Theta_5} = \frac{\Delta\Theta_6}{\Sigma'\Delta\Theta_6} = \frac{\Delta\Theta_7}{\Sigma'\Delta\Theta_7} = \frac{S'\Delta\Theta_i}{\Sigma S'\Delta\Theta_i}.$$

Par suite on aurait

(82) $$\Delta\Theta_1 = \frac{\Sigma'\Delta\Theta_1}{\Sigma S'\Delta\Theta_i} S'\Delta\Theta_i, \quad \Delta\Theta_2 = \frac{\Sigma'\Delta\Theta_2}{\Sigma S'\Delta\Theta_i} S'\Delta\Theta_i, \text{ etc.} \dots \Delta\Theta_7 = \frac{\Sigma'\Delta\Theta_7}{\Sigma S'\Delta\Theta_i} S'\Delta\Theta_i.$$

Si l'on pouvait en réalité considérer comme égaux les rapports compris dans la formule (77), et attribuer les différences de leurs valeurs réduites en nombres aux erreurs d'observation, alors les valeurs de

$$\Delta\Theta_1, \ \Delta\Theta_2, \ \Delta\Theta_3, \ \Delta\Theta_4, \ \Delta\Theta_5, \ \Delta\Theta_6, \ \Delta\Theta_7$$

déterminées par les formules (82) mériteraient plus de confiance que les valeurs immédiatement déduites des expériences. Dans le cas contraire, les seconds membres des formules (82) pourraient être considérés comme représentant non les valeurs exactes, mais seulement des valeurs approchées de

$$\Delta\Theta_1, \ \Delta\Theta_2, \ \Delta\Theta_3, \ \Delta\Theta_4, \ \Delta\Theta_5, \ \Delta\Theta_6, \ \Delta\Theta_7.$$

Désignons ces valeurs approchées par

$$\vartheta_1', \ \vartheta_2', \ \vartheta_3', \ \vartheta_4', \ \vartheta_5', \ \vartheta_6', \ \vartheta_7',$$

ensorte qu'on ait

(83) $$\vartheta_1' = \frac{\Sigma'\Delta\Theta_1}{\Sigma S'\Delta\Theta_i} S'\Delta\Theta_i, \quad \vartheta_2' = \frac{\Sigma'\Delta\Theta_2}{\Sigma S'\Delta\Theta_i} S'\Delta\Theta_i, \text{ etc.} \dots \vartheta_7' = \frac{\Sigma'\Delta\Theta_7}{\Sigma S'\Delta\Theta_i} S'\Delta\Theta_i,$$

et par

$$\Delta'\Theta_i$$

la valeur de la différence

$$\Delta\Theta_i - \vartheta_i'$$

de sorte qu'on ait encore

(84) $$\Delta\Theta_1 = \vartheta_1' + \Delta'\Theta_1, \quad \Delta\Theta_2 = \vartheta_2' + \Delta'\Theta_2, \text{ etc.} \dots \Delta\Theta_7 = \vartheta_7' + \Delta'\Theta_7.$$

On tirera des équations (83), en ayant égard à l'équation (71),

(85) $$\vartheta_1' + \vartheta_2' + \vartheta_3' + \vartheta_4' + \vartheta_5' + \vartheta_6' + \vartheta_7' = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

(86) $$S\vartheta_i' = 0,$$

et de plus

(87) $$S\,\vartheta_i' = S'\Delta\Theta_i.$$

D'ailleurs les équations (84) sont toutes comprises dans la formule générale

(88) $$\Delta\Theta_i = \vartheta_i' + \Delta'\Theta_i,$$

et de cette dernière jointe aux formules (71), (86), (87) on conclurra

(89) $$S\Delta'\Theta_i = 0, \qquad S'\Delta'\Theta_i = 0.$$

Cela posé, cherchons ce qui arriverait si dans la formule (42) et autres semblables on pouvait sans erreur sensible supposer $n = 4$. Alors cette formule, se réduisant à

(90) $$K_1\Theta_1 + K_2\Theta_2 + K_3\Theta_3 + K_4\Theta_4 = 0,$$

et devant subsister quel que fût le milieu réfringent, entraînerait la suivante

(91) $$K_1\Sigma\Theta_1 + K_2\Sigma\Theta_2 + K_3\Sigma\Theta_3 + K_4\Sigma\Theta_4 = 0,$$

de laquelle on tirerait, en la combinant avec les quatre premières des formules (68),

(92) $$K_1\vartheta_1 + K_2\vartheta_2 + K_3\vartheta_3 + K_4\vartheta_4 = 0.$$

D'ailleurs, en substituant dans la formule (90) les valeurs de

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \Theta_3, \quad \Theta_4,$$

tirées des équations (69), et ayant égard à la formule (92), on obtiendrait la suivante

(93) $$K_1\Delta\Theta_1 + K_2\Delta\Theta_2 + K_3\Delta\Theta_3 + K_4\Delta\Theta_4 = 0;$$

et, celleci devant encore subsister indépendamment de la nature du milieu que l'on considère, on en conclurrait

(94) $$K_1\Sigma\Delta\Theta_1 + K_2\Sigma\Delta\Theta_2 + K_3\Sigma\Delta\Theta_3 + K_4\Sigma\Delta\Theta_4 = 0,$$

puis, en ayant égard aux quatre premières des formules (83),

(95) $$K_1\vartheta_1' + K_2\vartheta_2' + K_3\vartheta_3' + K_4\vartheta_4' = 0.$$

Enfin, en substituant dans la formule (93) les valeurs de

$$\Delta\Theta_1, \quad \Delta\Theta_2, \quad \Delta\Theta_3, \quad \Delta\Theta_4,$$

tirées des équations (84), et ayant égard à l'équation (95), on trouverait

$$(96) \qquad K_1\Delta^2\Theta_1 + K_2\Delta^2\Theta_2 + K_3\Delta^2\Theta_3 + K_4\Delta^2\Theta_4 = 0.$$

En vertu de la formule (96), $\Delta^2\Theta_4$ deviendrait une fonction linéaire des trois quantités

$$\Delta^2\Theta_1,\quad \Delta^2\Theta_2,\quad \Delta^2\Theta_3.$$

Des formules semblables détermineraient $\Delta^2\Theta_5$, $\Delta^2\Theta_6$, $\Delta^2\Theta_7$ en fonctions linéaires des mêmes quantités; et la substitution des valeurs de

$$\Delta^2\Theta_4,\quad \Delta^2\Theta_5,\quad \Delta^2\Theta_6,\quad \Delta^2\Theta_7,$$

ainsi déterminées dans les équations (89) fournirait entre les seules quantites

$$\Delta^2\Theta_1,\quad \Delta^2\Theta_2,\quad \Delta^2\Theta_3$$

deux équations nouvelles qui donneraient pour les rapports

$$\frac{\Delta^2\Theta_1}{\Delta^2\Theta_2},\quad \frac{\Delta^2\Theta_1}{\Delta^2\Theta_3}$$

deux valeurs indépendantes de la nature du milieu réfringent. On aurait donc en vertu de ces équations nouvelles, et en désignant par $\Delta^2\Theta_i'$ ce que devient $\Delta^2\Theta_i$, quand on passe du premier milieu au second,

$$\frac{\Delta^2\Theta_1}{\Delta^2\Theta_2} = \frac{\Delta^2\Theta_1'}{\Delta^2\Theta_2'},\qquad \frac{\Delta^2\Theta_1}{\Delta^2\Theta_3} = \frac{\Delta^2\Theta_1'}{\Delta^2\Theta_3'},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\Delta^2\Theta_1}{\Delta^2\Theta_1'} = \frac{\Delta^2\Theta_2}{\Delta^2\Theta_2'} = \frac{\Delta^2\Theta_3}{\Delta^2\Theta_3'}.$$

On trouverait plus généralement

$$(97) \qquad \frac{\Delta^2\Theta_1}{\Delta^2\Theta_1'} = \frac{\Delta^2\Theta_2}{\Delta^2\Theta_2'} = \frac{\Delta^2\Theta_3}{\Delta^2\Theta_3'} = \frac{\Delta^2\Theta_4}{\Delta^2\Theta_4'} = \frac{\Delta^2\Theta_5}{\Delta^2\Theta_5'} = \frac{\Delta^2\Theta_6}{\Delta^2\Theta_6'} = \frac{\Delta^2\Theta_7}{\Delta^2\Theta_7'};$$

puis, en designant par

$$S''\Delta_2\Theta_i$$

la somme des valeurs numériques de

$$\Delta^2\Theta_1,\quad \Delta^2\Theta_2,\quad \Delta^2\Theta_3,\quad \Delta^2\Theta_4,\quad \Delta^2\Theta_5,\quad \Delta^2\Theta_6,\quad \Delta^2\Theta_7,$$

au moins pour l'une des substances, par

$$\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i$$

la somme des valeurs numériques de

$$S''\Delta^2\Theta_i,\quad S''\Delta^2\Theta_i',\quad S''\Delta^2\Theta_i'',\quad \text{etc.}\ldots..$$

et raisonnant sur la formule (97) comme sur la formule (77), on obtiendrait non plus l'équation (81) mais la suivante

$$(98) \quad \frac{\Delta^2\Theta_1}{\Sigma''\Delta^2\Theta_1} = \frac{\Delta^2\Theta_2}{\Sigma''\Delta^2\Theta_2} = \frac{\Delta^2\Theta_3}{\Sigma''\Delta^2\Theta_3} = \frac{\Delta^2\Theta_4}{\Sigma''\Delta^2\Theta_4} = \frac{\Delta^2\Theta_5}{\Sigma''\Delta^2\Theta_5} = \frac{\Delta^2\Theta_6}{\Sigma''\Delta^2\Theta_6} = \frac{\Delta^2\Theta_7}{\Sigma''\Delta^2\Theta_7} = \frac{S''\Delta^2\Theta_i}{\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i},$$

de laquelle on tirerait

$$(99)\quad \Delta^2\Theta_1 = \frac{\Sigma''\Delta^2\Theta_1}{\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i}S''\Delta^2\Theta_i,\quad \Delta^2\Theta_2 = \frac{\Sigma''\Delta^2\Theta_2}{\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i}S''\Delta^2\Theta_i,\ \text{etc.}\ldots\ \Delta^2\Theta_7 = \frac{\Sigma''\Delta^2\Theta_7}{\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i}S''\Delta^2\Theta_i.$$

Si l'on peut en réalité considérer comme égaux les rapports compris dans la formule (77), et attribuer les différences de leurs valeurs réduites en nombres aux erreurs d'observation, alors les valeurs de

$$\Delta^2\Theta_1,\ \Delta^2\Theta_2,\ \Delta^2\Theta_3,\ \Delta^2\Theta_4,\ \Delta^2\Theta_5,\ \Delta^2\Theta_6,\ \Delta^2\Theta_7$$

déterminées par les formules (99) mériteront plus de confiance que les valeurs immédiatement déduites des expériences.

On pourrait pousser plus loin ces calculs; et, s'il arrivait que pour rendre sensiblement exactes la formule (42) et autres semblables on dût y supposer $n = 5$, alors, en faisant pour abréger

$$(100)\quad \vartheta_1'' = \frac{\Sigma''\Delta^2\Theta_1}{\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i}S''\Delta^2\Theta_i,\ \vartheta_2'' = \frac{\Sigma''\Delta^2\Theta_2}{\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i}S''\Delta^2\Theta_i,\ \text{etc.}\ldots,\ \vartheta_7'' = \frac{\Sigma''\Delta^2\Theta_7}{\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i}S''\Delta^2\Theta_i,$$

et posant d'ailleurs

$$(101)\quad \Delta^2\Theta_1 = \vartheta_1'' + \Delta^3\Theta_1,\quad \Delta^2\Theta_2 = \vartheta_2'' + \Delta^3\Theta_2,\ \text{etc.}\ \ldots\ \Delta^2\Theta_7 = \vartheta_7'' + \Delta^3\Theta_7,$$

on tirerait des formules (100), (101) jointes aux équations (89)

$$(102)\qquad S\vartheta_i'' = 0,\qquad S'\vartheta_i'' = 0,$$

$$(103)\qquad S''\vartheta_i'' = S''\Delta^2\Theta_i;$$

et par suite

$$(104)\qquad S\Delta^3\Theta_i = 0,\quad S'\Delta^3\Theta_i = 0,\quad S''\Delta^3\Theta_i = 0,$$

puis de la formule (42) réduite à

$$(105)\qquad K_1\Theta_1 + K_2\Theta_2 + K_3\Theta_3 + K_4\Theta_4 + K_5\Theta_5 = 0,$$

et jointe aux équations (68), (69), (83), (84), (100), (101)

$$(106)\qquad K_1\Delta^3\Theta_1 + K_2\Delta^3\Theta_2 + K_3\Delta^3\Theta_3 + K_4\Delta^3\Theta_4 + K_5\Delta^3\Theta_5 = 0.$$

Enfin de cette dernière équation et autres semblables réunies aux formules (104) on conclurrait que les quantités

$$\Delta^3\Theta_1,\ \Delta^3\Theta_2,\ \Delta^3\Theta_3,\ \Delta^3\Theta_4,\ \Delta^3\Theta_5,\ \Delta^3\Theta_6,\ \Delta^3\Theta_7$$

conservent entre elles des rapports indépendants de la nature du milieu réfringent, et vérifient par conséquent la formule

$$(107)\qquad \frac{\Delta^3\Theta_1}{\Delta^3\Theta_1'} = \frac{\Delta^3\Theta_2}{\Delta^3\Theta_2'} = \frac{\Delta^3\Theta_3}{\Delta^3\Theta_3'} = \frac{\Delta^3\Theta_4}{\Delta^3\Theta_4'} = \frac{\Delta^3\Theta_5}{\Delta^3\Theta_5'} = \frac{\Delta^3\Theta_6}{\Delta^3\Theta_6'} = \frac{\Delta^3\Theta_7}{\Delta^3\Theta_7'};$$

puis, en désignant par

$$S'''\Delta^3\Theta_i$$

la somme des valeurs numériques de

$$\Delta^3\Theta_1,\ \ \Delta^3\Theta_2,\ \ \Delta^3\Theta_3,\ \ \Delta^3\Theta_4,\ \ \Delta^3\Theta_5,\ \ \Delta^3\Theta_6,\ \ \Delta^3\Theta_7$$

au moins pour l'une des substances, par

$$\Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_i,$$

la somme des valeurs numériques de

$$S'''\Delta^3\Theta_i,\ \ S'''\Delta^3\Theta_i',\ \ S'''\Delta^3\Theta_i'',\ \ \text{etc.}\ldots..$$

et raisonnant sur la formule (107) comme sur les formules (77) et (97), on obtiendrait non plus les équations (81) et (98), mais la suivante

$$(108)\quad \frac{\Delta^3\Theta_1}{\Sigma'''\Delta^3\Theta_1}=\frac{\Delta^3\Theta_2}{\Sigma'''\Delta^3\Theta_2}=\frac{\Delta^3\Theta_3}{\Sigma'''\Delta^3\Theta_3}=\frac{\Delta^3\Theta_4}{\Sigma'''\Delta^3\Theta_4}=\frac{\Delta^3\Theta_5}{\Sigma'''\Delta^3\Theta_5}=\frac{\Delta^3\Theta_6}{\Sigma'''\Delta^3\Theta_6}=\frac{\Delta^3\Theta_7}{\Sigma'''\Delta^3\Theta_7}=\frac{S'''\Delta^3\Theta_i}{\Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_i},$$

de laquelle on tirerait

$$(109)\quad \Delta^3\Theta_1=\frac{\Sigma'''\Delta^3\Theta_1}{\Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_i}S'''\Delta^3\Theta_i,\ \ \Delta^3\Theta_2=\frac{\Sigma'''\Delta^3\Theta_2}{\Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_i}S'''\Delta^3\Theta_i,\ \text{etc.}\ldots\Delta^3\Theta_7=\frac{\Sigma'''\Delta^3\Theta_7}{\Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_i}S'''\Delta^3\Theta_i.$$

Si l'on peut en réalité réduire la formule (42) à la formule (105), considérer par suite comme égaux les rapports compris dans la formule (97), et attribuer les différences de leurs valeurs réduites en nombres aux erreurs d'observation, alors les valeurs de

$$\Delta^3\Theta_1,\ \ \Delta^3\Theta_2,\ \ \Delta^3\Theta_3,\ \ \Delta^3\Theta_4,\ \ \Delta^3\Theta_5,\ \ \Delta^3\Theta_6,\ \ \Delta^3\Theta_7$$

déterminées par les formules (109) mériteront plus de confiance que les valeurs immédiatement déduites des expériences; et, en posant

$$(110)\quad \vartheta_1'''=\frac{\Sigma'''\Delta^3\Theta_1}{\Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_i}S'''\Delta^3\Theta_i,\ \ \vartheta_2'''=\frac{\Sigma'''\Delta^3\Theta_2}{\Sigma'''S'''\Delta_3\Theta_i}S'''\Delta^3\Theta_i,\ \text{etc.}\ldots\vartheta_7'''=\frac{\Sigma'''\Delta^3\Theta_7}{\Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_i}S'''\Delta^3\Theta_i$$

puis désignant généralement par

$$\Delta^4\Theta_i$$

la différence

$$\Delta^3\Theta_i-\vartheta_i'''$$

en sorte qu'on eût

$$(111)\quad \Delta^3\Theta_1=\vartheta_1'''+\Delta^4\Theta_1,\ \ \Delta^3\Theta_2=\vartheta_2'''+\Delta^4\Theta_2,\ \text{etc.}\ldots..\ \ \Delta^3\Theta_7=\vartheta_7'''+\Delta^4\Theta_7,$$

on trouverait pour valeurs des différences

$$\Delta^4{}_1\Theta,\ \ \Delta^4\Theta_2,\ldots..\ \Delta^4\Theta_7$$

des quantités du même ordre que les erreurs d'observation.

En résumé, si l'on veut savoir jusqu'où les expériences permettent de pousser l'approximation, ou, ce qui revient au même, combien de termes doivent renfermer les équations linéaires qui, comme l'équation (42), subsistent entre les quantités

$$\Theta_1,\quad \Theta_2,\quad \Theta_3,\quad \Theta_4,\quad \text{etc.}\ldots,$$

indépendamment de la nature du milieu réfringent, on calculera, pour les divers rayons et pour les diverses substances, les valeurs successives de

$$(112)\qquad \Delta\Theta_i,\quad \Delta^2\Theta_i,\quad \Delta^3\Theta_i,\quad \Delta^4\Theta_i,\quad \text{etc.}\ldots..$$

à l'aide des équations

$$(113)\quad \left\{\begin{array}{llll} \Theta_1=\vartheta_1+\Delta\Theta_1, & \Theta_2=\vartheta_2+\Delta\Theta_2, & \text{etc.}\ldots & \Theta_7=\vartheta_7+\Delta\Theta_7,\\ \Delta\Theta_1=\vartheta_1'+\Delta^2\Theta_1, & \Delta\Theta_2=\vartheta_2'+\Delta^2\Theta_2, & \text{etc.}\ldots & \Delta\Theta_7=\vartheta_7'+\Delta^2\Theta_7,\\ \Delta^2\Theta_1=\vartheta_1''+\Delta^3\Theta_1, & \Delta^2\Theta_2=\vartheta_2''+\Delta^3\Theta_2, & \text{etc.}\ldots & \Delta^2\Theta_7=\vartheta_7''+\Delta^3\Theta_7,\\ \Delta^3\Theta_1=\vartheta_1'''+\Delta^4\Theta_1, & \Delta^3\Theta_2=\vartheta_2'''+\Delta^4\Theta_2, & \text{etc.}\ldots & \Delta^3\Theta_7=\vartheta_7'''+\Delta^4\Theta_7,\\ \text{etc.}\ldots.. & & & \end{array}\right.$$

jointes aux formules

$$(114)\quad \left\{\begin{array}{lll} \vartheta_1=\dfrac{\Sigma\Theta_1}{\Sigma S\Theta_i}S\Theta_i, & \vartheta_2=\dfrac{\Sigma\Theta_2}{\Sigma S\Theta_i}S\Theta_i, & \text{etc.}\ldots\vartheta_7=\dfrac{\Sigma\Theta_7}{\Sigma S\Theta_i}S\Theta_i,\\ \vartheta_1'=\dfrac{\Sigma'\Delta\Theta_1}{\Sigma S'\Delta\Theta_i}S'\Delta\Theta_i, & \vartheta_2'=\dfrac{\Sigma'\Delta\Theta_2}{\Sigma S'\Delta\Theta_i}S'\Delta\Theta_i, & \text{etc.}\ldots\vartheta_7'=\dfrac{\Sigma'\Delta\Theta_7}{\Sigma S'\Delta\Theta_i}S'\Delta\Theta_i,\\ \vartheta_1''=\dfrac{\Sigma''\Delta^2\Theta_1}{\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i}S''\Delta^2\Theta_i, & \vartheta_2''=\dfrac{\Sigma''\Delta^2\Theta_2}{\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i}S''\Delta^2\Theta_i, & \text{etc.}\ldots\vartheta_7''=\dfrac{\Sigma''\Delta^2\Theta_7}{\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i}S''\Delta^2\Theta_i,\\ \vartheta_1'''=\dfrac{\Sigma'''\Delta^3\Theta_1}{\Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_i}S'''\Delta^3\Theta_i, & \vartheta_2'''=\dfrac{\Sigma'''\Delta^3\Theta_2}{\Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_i}S'''\Delta^3\Theta_i, & \text{etc.}\ldots\vartheta_7'''=\dfrac{\Sigma'''\Delta^3\Theta_7}{\Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_i}S'''\Delta^3\Theta_i,\\ \text{etc.}\ldots.. & & \end{array}\right.$$

dans lesquelles on désigne par

$$S\Theta_i,\quad S'\Delta\Theta_i,\quad S''\Delta^2\Theta_i,\quad S'''\Delta^3\Theta_i,\quad \text{etc.}\ldots..$$

les sommes des valeurs de

$$\Theta_i,\quad \Delta\Theta_i,\quad \Delta^2\Theta_i,\quad \Delta^3\Theta_i,\quad \text{etc.}\ldots..$$

relatives aux divers rayons, mais prises tantôt avec le signe $+$, tantôt avec le signe $-$, de manière à se réduire du moins pour certaines substances aux sommes des valeurs numériques, et par

$$\Sigma S\Theta_i,\quad \Sigma S'\Delta\Theta_i,\quad \Sigma''S''\Delta^2\Theta_i,\quad \Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_i,\quad \text{etc.}\ldots.$$

les sommes des valeurs numériques de

$$S\Theta_i,\quad S'\Delta\Theta_i,\quad S''\Delta^2\Theta_i,\quad S'''\Delta^3\Theta_i,\quad \text{etc.}\ldots.$$

relatives aux diverses substances. Il suffira de continuer le calcul des différences représentées par

$$\Delta\Theta_i,\quad \Delta^2\Theta_i,\quad \Delta^3\Theta_i,\quad \Delta^4\Theta_i,\quad \text{etc.}\ldots.$$

jusqu'à cequel' on parvienne à des différences comparables aux erreurs d'observation. On peut d'ailleurs aisément reconnaître la nature de ces erreurs, et se former une idée de leur étendue, en comparant entre elles deux à deux les valeurs de Θ_i que fournissent deux séries d'expériences faites sur la même substance, par exemple, les deux séries d'expériences faites par Frauenhofer sur l'eau ou sur la troisième espèce de flintglass. Il y a plus; comme on aurait généralement

$$\Theta_i = \vartheta_i$$

par conséquent

$$\Delta\Theta_i = 0,$$

si l'on pouvait sans erreur sensible réduire le second membre de la formule (9) à son premier terme;

$$\Delta\Theta_i = \vartheta_i'$$

par conséquent

$$\Delta^2\Theta_i = 0,$$

si l'on pouvait sans erreur sensible réduire le second membre de la formule (9) à ses deux premiers termes, etc. . . . ; il est clair que les différents termes de la suite

$$\Delta\Theta_i,\quad \Delta^2\Theta_i,\quad \Delta^3\Theta_i,\quad \Delta^4\Theta_i,\quad \text{etc.}\ldots.$$

seront respectivement comparables aux coefficients

$$b_2,\quad b_3,\quad b_4,\quad b_5,\quad \text{etc.}\ldots.$$

des 4e, 6e, 8e, 10e,... puissances de s dans le second membre de l'équation (9), et qu'en conséquence $\Delta\Theta_i$ sera du même ordre que b_2, $\Delta^2\Theta_i$ du même ordre que b_3, $\Delta^3\Theta_i$ du même ordre que b_4, $\Delta^4\Theta_i$ du même ordre que b_5, etc. . . . Or, si la distance de deux molécules d'éther, assez rapprochées pour exercer l'une sur l'autre une action sensible, est considérée comme une quantité très petite du premier ordre,

$$a_2b_2,\quad a_3b_3,\quad a_4b_4,\quad a_5b_5,\quad \text{etc.}\ldots.$$

seront, en vertu des remarques faites sur la formule (11), des quantités très petites du premier, du second, du troisième, du quatrième ... ordre. En conséquence, non seulement les coefficients

$$b_2,\quad b_3,\quad b_4,\quad b_5,\quad \ldots.$$

mais aussi les différences des divers ordres, savoir,

(112) $$\Delta\Theta_i,\quad \Delta^2\Theta_i,\quad \Delta^3\Theta_i,\quad \Delta^4\Theta_i,\quad \text{etc.}\ldots.$$

et leurs valeurs approchées, ou les quantités

(113) $$\vartheta_i',\quad \vartheta_i'',\quad \vartheta_i''',\quad \vartheta_i'''',\quad \text{etc.}\ldots.$$

déterminées par les équations (114) formeront généralement des suites décroissantes jusqu'au moment où les différences deviendront du même ordre que les erreurs d'observation. Remarquons encore que chacune des quantités (115) obtiendra pour les divers rayons des valeurs diverses qui, en vertu des équations (114) devront toutes garder les mêmes signes, ou toutes à la fois changer de signes, lorsqu'on passera d'une substance à une autre. Or il est clair que les differences

$$\Delta\Theta_i, \quad \Delta^2\Theta_i, \quad \Delta^3\Theta_i, \quad \Delta^4\Theta_i, \quad \text{etc.} \ldots,$$

dont les quantités dont il s'agit représentent des valeurs approchées, devront généralement satisfaire à la même condition, tant qu'elles ne seront pas devenues assez petites pour être du même ordre que les erreurs d'observation. Enfin les formules (113) et (114) entraineront, comme on l' a déjà remarqué, les équations de condition

$$(116) \quad \left\{ \begin{array}{llll} S\vartheta_i = S\Theta_i, & & & \\ S\vartheta_i' = 0, & S'\vartheta_i' = S'\Delta\Theta_i, & & \\ S\vartheta_i'' = 0, & S'\vartheta_i'' = 0, & S''\vartheta_i'' = S''\Delta^2\Theta_i, & \\ S\vartheta_i''' = 0, & S'\vartheta_i''' = 0, & S''\vartheta_i''' = 0, & S'''\vartheta_i''' = S'''\Delta^3\Theta_i, \\ \text{etc.} \ldots & & & \end{array} \right.$$

et

$$(117) \quad \left\{ \begin{array}{llll} S\Delta\Theta_i = 0, & & & \\ S\Delta^2\Theta_i = 0, & S'\Delta^2\Theta_i = 0, & & \\ S\Delta^3\Theta_i = 0, & S'\Delta^3\Theta_i = 0, & S''\Delta^3\Theta_i = 0, & \\ S\Delta^4\Theta_i = 0, & S'\Delta^4\Theta_i = 0, & S''\Delta^4\Theta_i = 0, & S'''\Delta^4\Theta_i = 0, \\ \text{etc.} \ldots & & & \end{array} \right.$$

aux quelles on pourra joindre les suivantes que l'on forme de la même manière

$$(118) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \Sigma\vartheta_i = \Sigma\Theta_i, & & & \\ \Sigma\vartheta_i' = 0, & \Sigma'\vartheta_i' = \Sigma'\Delta\Theta_i, & & \\ \Sigma\vartheta_i'' = 0, & \Sigma'\vartheta_i'' = 0, & \Sigma''\vartheta_i'' = \Sigma''\Delta^2\Theta_i, & \\ \Sigma\vartheta_i''' = 0, & \Sigma'\vartheta_i''' = 0, & \Sigma''\vartheta_i''' = 0, & \Sigma'''\vartheta_i''' = \Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_i, \\ \text{etc.} \ldots & & & \end{array} \right.$$

et

$$(119) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \Sigma\Delta\Theta_i = 0, & & & \\ \Sigma\Delta^2\Theta_i = 0, & \Sigma'\Delta^2\Theta_i = 0, & & \\ \Sigma\Delta^3\Theta_i = 0, & \Sigma'\Delta^3\Theta_i = 0, & \Sigma''\Delta^3\Theta_i = 0, & \\ \Sigma\Delta^4\Theta_i = 0, & \Sigma'\Delta^4\Theta_i = 0, & \Sigma''\Delta^4\Theta_i = 0, & \Sigma'''\Delta^4\Theta_i = 0, \\ \text{etc.} \ldots & & & \end{array} \right.$$

Si l'on posait pour abréger

$$(120)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{\Sigma\Theta_1}{\Sigma S\Theta_i}, \quad \alpha_2 = \dfrac{\Sigma\Theta_2}{\Sigma S\Theta_i}, \quad \text{etc.} \ldots\ldots \quad \alpha_7 = \dfrac{\Sigma\Theta_7}{\Sigma S\Theta_i}, \\ \beta_1 = \dfrac{\Sigma' \Delta\Theta_1}{\Sigma' S' \Delta\Theta_i}, \quad \beta_2 = \dfrac{\Sigma' \Delta\Theta_2}{\Sigma' S' \Delta\Theta_i}, \quad \text{etc.} \ldots\ldots \quad \beta_7 = \dfrac{\Sigma' \Delta\Theta_7}{\Sigma' S' \Delta\Theta_i}, \\ \gamma_1 = \dfrac{\Sigma'' \Delta^2\Theta_1}{\Sigma'' S'' \Delta^2\Theta_i}, \quad \gamma_2 = \dfrac{\Sigma'' \Delta^2\Theta_2}{\Sigma'' S'' \Delta^2\Theta_i}, \quad \text{etc.} \ldots\ldots \quad \gamma_7 = \dfrac{\Sigma'' \Delta^2\Theta_7}{\Sigma'' S'' \Delta^2\Theta_i}, \\ \delta_1 = \dfrac{\Sigma''' \Delta^3\Theta_1}{\Sigma''' S''' \Delta^3\Theta_i}, \quad \delta_2 = \dfrac{\Sigma''' \Delta^3\Theta_2}{\Sigma''' S''' \Delta^3\Theta_i}, \quad \text{etc.} \ldots\ldots \quad \delta_7 = \dfrac{\Sigma''' \Delta^3\Theta_7}{\Sigma''' S''' \Delta^3\Theta_i}, \\ \text{etc.} \ldots\ldots \end{cases}$$

les formules (114) se réduiraient à

$$(121)\quad \begin{cases} \vartheta_1 = \alpha_1 S\Theta_i, \quad \vartheta_2 = \alpha_2 S\Theta_i, \quad \text{etc.} \ldots\ldots \quad \vartheta_7 = \alpha_7 S\Theta_i, \\ \vartheta_1' = \beta_1 S'\Delta\Theta_i, \quad \vartheta_2' = \beta_2 S'\Delta\Theta_i, \quad \text{etc.} \ldots\ldots \quad \vartheta_7' = \beta_7 S'\Delta\Theta_i, \\ \vartheta_1'' = \gamma_1 S''\Delta^2\Theta_i, \quad \vartheta_2'' = \gamma_2 S''\Delta^2\Theta_i, \quad \text{etc.} \ldots\ldots \quad \vartheta_7'' = \gamma_7 S''\Delta^2\Theta_i, \\ \vartheta_1''' = \delta_1 S'''\Delta^3\Theta_i, \quad \vartheta_2''' = \delta_2 S'''\Delta^3\Theta_i, \quad \text{etc.} \ldots\ldots \quad \vartheta_7''' = \delta_7 S'''\Delta^3\Theta_i, \\ \text{etc.} \ldots\ldots \end{cases}$$

et l'on tirerait des équations (120) jointes aux équations (117)

$$(122)\quad \begin{cases} S\alpha_i = 1, \\ S\beta_i = 0, \quad S'\beta_i = 1, \\ S\gamma_i = 0, \quad S'\gamma_i = 0, \quad S''\gamma_i = 1, \\ S\delta_i = 0, \quad S'\delta_i = 0, \quad S''\delta_i = 0, \quad S'''\delta_i = 1, \\ \text{etc.} \ldots\ldots \end{cases}$$

Les formules (116), (117), (120) fournissent divers moyens de vérifier l'exactitude des valeurs de

$$\Delta\Theta_i,\ \Delta^2\Theta_i,\ \Delta^3\Theta_i, \ldots\ldots;\quad \vartheta_i,\ \vartheta_i',\ \vartheta_i'', \ldots\ldots;\quad \alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ \delta_i, \ldots\ldots$$

déduites de l'expérience à l'aide des équations (113), (114), (120), (121).

Venons maintenant aux applications numériques des diverses formules cidessus établies, et dabord calculons par logarithmes les carrés des indices de réfraction ou les valeurs de Θ_i pour les rayons

$$B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,$$

de Frauenhofer et pour les diverses substances employées par cet habile observateur. Ces valeurs seront fournies par le tableau suivant.

VI. TABLEAU.

Détermination des valeurs de Θ_i.

	Eau		Solution de potasse.	Huile de téré-benthine	Crownglass			Flintglass				
	1. Série.	2. Série.			1.espèce.	2.espèce.	3.espèce.	1.espèce.	2.espèce.	3.espèce. 1. Série.	3.espèce. 2. Série.	4.espèce.
$L(\theta_1)$	1241568	1241706	1460129	1671640	1830739	1835068	1916673	2016739	2104711	2112713	2112798	2115875
$L(\Theta_1)$	2483136 2921 215 197 18	2483112	2920258 0123 135 133 2	3319280 9159 121	3661478 1427 51 37 11	3670136 0016 120 112 8	3833346 3306 40 36 4	4093478 8413 65 51 14	4209422 9289 133 132 1	4225126 5406 20 16 4	4225596 5570 26 16 10	4231750 1639 111 98 13
Θ_1	1,771387	1,771500	1,958961	2,162360	2,323527	2,328161	2,417322	2,566338	2,633981	1,645712	2,645816	2,649568
$L(\theta_2)$	1211104	1211093	1162878	1677692	1833551	1837962	1919909	2051502	2109810	2117748	2117795	2121027
$L(\Theta_2)$	2188208 8067 111 123 18	2188186 8067 119 98 21	2925736 5662 91 89 5	3353381 3381 3	3667102 7031 71 56 15	3675924 5795 129 112 17	3839818 9769 49 36 13	4103004 2878 126 118 8	4219620 9193 127 115 12	4235496 5408 88 82 6	4235590 5571 19 16 3	4242054 1954 100 98 2
Θ_2	1,773157	1,773119	1,961112	2,165102	2,326538	2,331269	2,420927	2,572175	2,642177	2,651854	2,651912	2,655861
$L(\theta_3)$	1250182	1250182	1169974	1686251	1841183	1845713	1928671	2061196	2123435	2131633	2131636	2135274
$L(\Theta_3)$	2500361 0291 70 49 21	2500364 0294 70 49 21	2939918 9810 138 133 5	3372508 2396 112 100 12	3682366 2311 55	3691186 1416 70 56 11	3857342 7314 28 18 10	4128392 8300 92 84 8	4216870 6857 13	4263266 3160 106 98 8	4263272 3160 112 98 14	4270548 0477 71 65 6
Θ_3	1,778129	1,778129	1,967862	2,173955	2,334730	2,339637	2,430716	2,587255	2,658808	2,668865	2,668869	2,673344
$L(\theta_4)$	1257580	1257573	1178716	1697782	1850808	1855436	1940007	2080166	2141432	2149879	2149750	2153796
$L(\Theta_4)$	2515160 4922 238 220 18	2515146 4922 224 220 4	2957432 7430 2	3395364 5508 56 10 16	3701616 1614 2	3710872 0863 9	3880014 79946 68 53 15	4160932 0911 21 17 4	4282864 2806 58 49 9	4299758 9621 137 130 7	4399500 9460 40 32 8	4307592 7521 71 65 6
Θ_4	1,781197	1,784192	1,975801	2,185528	2,345101	2,350105	2,448438	2,606712	2,680936	2,691384	2,691225	2,696244

$L(\theta_5)$	1263971	1263873	1486280	1707709	1859208	1861060	1919972	2095262	2157608	2166357	2166293	2170257
$L(\Theta_5)$	2527942 7802 110 122 18	2527716 7560 186 170 16	2972560 2351 209 197 12	3415118 5331 84 79 5	3718416 8249 167	3728120 8016 104 92 12	3899944 9807 137 124 13	4190524 0166 58 50 8	4315216 5085 131 129 2	4332714 2577 137 128 9	4332586 2577 9	4340514 0417 97 96 1
Θ_5	1,789757	1,789677	1,982695	2,195543	2,354190	2,359457	2,454677	2,624535	2,700981	2,711886	2,711806	2,716764
$L(\theta_6)$	1275238	1275133	1500129	1726608	1874948	1879878	1968761	2123983	2189046	2198069	2198066	2201827
$L(\Theta_6)$	2550476 0312 161 145 19	2550266 0070 196 194 2	3000258 0082 176 174 2	3453216 3119 67 59 8	3749896 9865 31 18 13	3759756 9744 12	3937528 7506 22 18 4	4217866 7837 29 16 13	4378092 7981 111	4396138 6011 127 126 1	4396132 6011 121 111 10	4403654 3580 74 63 11
Θ_6	1,799068	1,798981	1,995381	2,214734	2,371817	2,376707	2,476012	2,659418	2,740370	2,751781	2,751776	2,756547
$L(\theta_7)$	1284566	1284517	1511762	1713141	1888397	1893685	1985114	2119427	2216938	2226333	2226349	2229926
$L(\Theta_7)$	2569132 9101 31 21 7	2569034 8860 174 169 5	3023524 3309 215 195 20	3586282 6164 118 117 1	3776794 6704 90 73 17	3787370 7249 121 109 12	3970228 0183 45 35 10	4298851 8844 40 32 8	4433876 3725 151 141 10	4452666 2616 50 47 3	4452698 2616 82 78 4	4459852 9776 76 62 14
Θ_7	1,806813	1,806772	2,006099	2,231661	2,386019	2,391867	2,491726	2,690825	2,775796	2,787852	2,787853	2,792119

En comparant entre elles deux à deux les valeurs de Θ_i qui, dans le tableau précédent, répondent aux deux séries d'expériences faites sur l'eau et sur la troisième espèce de flintglass, on obtient les variations suivantes

VII. TABLEAU.

Variations de Θ_i dans le passage d'une série d'expériences à une autre.

		$i=1$	2	3	4	5	6	7
Θ_i Eau	1re Série	1,771387	1,773457	1,778129	1,781497	1,789757	1,799068	1,806813
	2e Série	1,771500	1,773119	1,778129	1,781192	1,789677	1,798981	1,806772
Variations de Θ_i		0,000113	- 0,000008	0	- 0,000005	- 0,000080	- 0,000087	- 0,000041
Θ_i Flintglass 3e espèce	1re Série	2,645712	2,651851	2,668865	2,691384	2,711886	2,751781	2,787832
	2e Série	2,645816	2,651912	2,668869	2,681225	2,711806	2,751776	2,787853
Variations de Θ_i		0,000101	- 0,000058	- 0,000001	- 0,000159	- 0,000080	- 0,000005	0,000021

Ainsi les valeurs de Θ_i déduites des expériences de Frauenhofer admettent des erreurs comparables aux nombres 0,000159 ; 0,000113 renfermés dans les 4e et 7e lignes horizontales du 7e tableau ; et dans l'application des formules (113), (114) on doit continuer le calcul jusqu'à ce que l'on obtienne des différences comparables à ces mêmes nombres. D'ailleurs on déduira sans peine du 6e tableau les sommes représentées dans les formules (114) par $S\Theta_i$, $\Sigma\Theta_i$ et $\Sigma S\Theta_i$, les diverses valeurs du rapport

$$\frac{S\Theta_i}{\Sigma S\Theta_i}$$

relatives aux diverses substances, et les logarithmes de ces valeurs. La détermination de ces quantités est l'objet du tableau suivant qui donne en outre pour chaque substance la moyenne arithmétique entre les diverses valeurs de Θ_i c'est à dire la valeur de la quantité Θ déterminée par l'équation

$$\Theta = \tfrac{1}{7} S\Theta_i = \frac{\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 + \Theta_5 + \Theta_6 + \Theta_7}{7}. \tag{123}$$

VIII. TABLEAU.

Valeurs de $S\Theta_i$, $\Sigma\Theta_i$, $\Sigma S\Theta_i$, $\frac{S\Theta_i}{\Sigma S\Theta_i}$ *et* Θ.

	Eau		Solution de potasse.	Huile de thérébenthine.	Crowaglass			Flintglass					Sommes.	
	1re Série.	2e Série.			1re espèce	2e espèce.	3e espèce.	1re espèce	2e espèce.	3e espèce. 1re Série.	3e espèce. 2e Série.	4e espèce.		
Θ_1	1,771387	1,771500	1,958961	2,162630	2,323527	2,328161	2,417322	2,566538	2,635981	2,645712	2,645816	2,649568	$\Sigma\Theta_1$	27,876836
Θ_2	1,773457	1,773449	1,961142	2,165402	2,326538	2,331269	2,420927	2,572175	2,642177	2,651854	2,651912	2,655861	$\Sigma\Theta_2$	27,926463
Θ_3	1,778429	1,778429	1,967862	2,173955	2,334730	2,339637	2,430716	2,587255	2,658808	2,668865	2,668869	2,673344	$\Sigma\Theta_3$	28,060899
Θ_4	1,784197	1,784492	1,975801	2,185528	2,345101	2,350105	2,443438	2,606712	2,680936	2,691384	2,691225	2,696244	$\Sigma\Theta_4$	28,235463
Θ_5	1,789757	1,789677	1,982695	2,195513	2,354190	2,359457	2,454677	2,624535	2,700981	2,711886	1,711806	2,716761	$\Sigma\Theta_5$	28,391965
Θ_6	1,799068	1,798981	1,995381	2,214731	2,371317	2,376707	2,476012	2,659418	2,740370	2,751781	2,751776	2,756547	$\Sigma\Theta_6$	28,692092
Θ_7	1,806813	1,806772	2,006099	2,231661	2,386019	2,391867	2,491726	2,690825	2,775796	2,787832	2,787853	2,792119	$\Sigma\Theta_7$	28,958542
$S\Theta_i$	12,503408	12,503300	13,848241	15,329183	16,141452	16,477206	17,137818	18,307458	18,835049	18,909314	18,909257	18,940774	$\Sigma S\Theta_i$	198,142460
	0970112	0970142	1113871	1855138	2159282	2168781	2339318	2626172	2719656	2766686	2766686	2773800		2969722
	139	101	63	28	106	53	203	95	9	69	46	161		44
	3		13	23	13	2	3	12	2	2	11	16		9
				1	1		2	2		1	2	1		1
$L(S\Theta_i)$	0970281	0970246	1113917	1855190	2159402	2168836	2339556	2626281	2719667	2766758	2766745	2773978	$L(\Sigma S\Theta_i)$	2969776
$L(\Sigma S\Theta_i)$	2969776	2969776	2969776	2969776	2969776	2969776	2969776	2969776	2969776	2969776	2969776	2969776		
Differ.	8000508	8000170	8144171	8885414	9189626	9199060	9369780	9656505	9779891	9796982	9796969	9804202	Sommes	
$\frac{S\Theta_i}{\Sigma S\Theta_i}$	0,063103	0,063102	0,069890	0,077361	0,082978	0,083158	0,086492	0,092395	0,095058	0,095433	0,095433	0,095592		0,999998
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,318779	2,353887	2,448260	2,615351	2,690721	2.701331	2,701322	2,705825	$\Sigma\Theta$	28,306066
														4518785
														9
														1
													$L(\Sigma\Theta)$	4518795

Diverses conditions, que remplissent, comme on devait s'y attendre, les nombres obtenus dans ce tableau, servent à prouver l'exactitude de nos calculs. Ces conditions se trouvent comprises dans les trois formules

$$\Sigma S\Theta_i = S\Sigma\Theta_i = 198{,}142460, \quad \Sigma\frac{S\Theta_i}{\Sigma S\Theta_i} = 1, \quad \Sigma\Theta = \tfrac{1}{7}\Sigma S\Theta_i = \frac{198{,}142460}{7} = 28{,}30606.$$

On ne doit pas s'inquiéter de la différence 0,000002 entre le second membre 1 de la deuxième formule et le nombre 0,999998 placé à la fin de la ligne horizontale qui renferme les valeurs de $\frac{S\Theta_i}{\Sigma S\Theta_i}$, l'omission de la 7e décimale dans chacune de ces valeurs suffisant pour produire dans leur somme une erreur égale à la différence dont il s'agit. En partant du 8e tableau, on pourra déterminer par logarithmes les valeurs approchées de Θ_1, Θ_2, ... que nous avons représentées par ϑ_1, ϑ_2, etc. .... dans les formules (113), (114), desquelles on tire généralement, en ayant égard à la formule (123),

$$(124) \qquad \vartheta_i = \frac{\Theta}{\Sigma\Theta}\Sigma\Theta_i,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(125) \qquad \vartheta_i = \Theta + \frac{\Theta}{\Sigma\Theta}\{\Sigma\Theta_i - \Sigma\Theta\}.$$

Or, la différence $\Sigma\Theta_i - \Sigma\Theta$ étant généralement beaucoup plus petite que $\Sigma\Theta_i$, il y aura quelque avantage à remplacer la formule (125), et à calculer au lieu du produit

$$(126) \qquad \frac{\Theta}{\Sigma\Theta}\Sigma\Theta_i$$

le produit plus petit

$$(127) \qquad \frac{\Theta}{\Sigma\Theta}\{\Sigma\Theta_i - \Sigma\Theta\},$$

attendu que de ces deux produits le premier contiendra aussi bien que Θ_i sept chiffres significatifs, et le second cinq seulement, l'approximation étant poussée jusqu'au chiffre décimal qui exprime des millionièmes. D'ailleurs, dans le produit (126), le facteur

$$(128) \qquad \frac{\Theta}{\Sigma\Theta} = \frac{S\Theta_i}{\Sigma S\Theta_i}$$

et son logarithme sont immédiatement donnés pour chaque substance par le 8e tableau, et quant au facteur

$$\Sigma\Theta_i - \Sigma\Theta$$

on en déterminera sans peine les diverses valeurs avec leurs logarithmes, à l'aide de ce même tableau, en opérant comme il suit.

IX. TABLEAU.

Détermination des valeurs de $\Sigma\Theta_i - \Sigma\Theta$.

Valeurs de i	$i = 1$	2	3	4	5	6	7	Sommes.
$\Sigma\Theta_i$	27,876836	27,926163	28,060899	28,235463	28,391965	28,692092	28,958742	198,142460
$\Sigma\Theta$	28,306066	28,306066	28,306066	28,306066	28,306066	28,306066	28,306066	198,142162
$\Sigma\Theta_i - \Sigma\Theta$	-0,429230	-0,379603	-0,245167	-0,070603	0,085899	0,386026	0,652676	-0,000002
	6326901	5793262 34	9894496 125	8188232	9339881	5866098 68	8116937 40	
$L\{\mp(\Sigma\Theta_i - \Sigma\Theta)\}$	6326901	5793296	3894621	8188232	9339881	5866166	8116977	
$L(\Sigma\Theta)$	4518795	4518705	4518795	4518795	4518795	4518795	4518795	
Différence	1808106	1274501	9375826	3969437	1821086	1317371	3628182	
$\frac{\Sigma\Theta_i}{\Sigma\Theta} - 1$	-0,015164	-0,013411	-0,008661	-0,002491	0,003035	0,013638	0,023058	0,000001
$\frac{\Sigma\Theta_i}{\Sigma\Theta}$	0,984836	0,986589	0,991339	0,997506	1,003035	1,013638	1,023058	7,000001
$\alpha_i = \frac{1}{7}\frac{\Sigma\Theta_i}{\Sigma\Theta} = \frac{\Sigma\Theta_i}{\Sigma S\Theta_i}$	0,140691	0,140941	0,141620	0,142501	0,143291	0,144805	0,146151	1,000000

Aux diverses valeurs de

$$\Sigma\Theta_i - \Sigma\Theta$$

nous avons joint ici celles des rapports

$$\frac{\Sigma\Theta_i}{\Sigma\Theta} \quad \text{et} \quad \frac{\Sigma\Theta_i}{\Sigma S\Theta_i} = \alpha_i$$

qui servent à prouver la justesse de nos calculs, attendu qu'elles doivent vérifier, et vérifient en effet avec une exactitude suffisante les deux conditions

$$S\,\frac{\Sigma\Theta_i}{\Sigma\Theta} = 7, \quad \text{et} \quad \Sigma\frac{\Sigma\Theta_i}{\Sigma S\Theta_i} = 1 \quad \text{ou} \quad S\alpha_i = 1.$$

Observons d'ailleurs qu'il suffirait de multiplier les diverses valeurs du rapport

$$\frac{\Sigma\Theta_i}{\Sigma S\Theta_i}$$

prises dans le 9e tableau par les diverses valeurs de $S\Theta_i$ prises dans le 8e pour obtenir les quantités ϑ_1, ϑ_2, etc.... En déterminant ces mêmes quantités à l'aide de la formule (125), on obtiendra les résultats que renferme le tableau suivant.

X. TABLEAU.

Valeurs de ϑ_i.

	Eau 1re Série.	Eau 2e Série.	Solution de potasse.	Huile de térébenthine.	Crownglass 1re espèce	Crownglass 2e espèce.	Crownglass 3e espèce.	Flintglass 1re espèce	Flintglass 2e espèce.	Flintglass 3e espèce. 1re Série.	Flintglass 3e espèce. 2e Série.	Flintglass 4e espèce.	Sommes.
$L\left(\frac{\Theta}{\Sigma\Theta}\right)$	8000508	8000470	8444171	8885444	9189626	9199060	9369780	9656505	9779891	9796982	9796969	9804202	
$L(\Sigma\Theta-\Sigma\Theta_1)$	6326901	6326901	6326901	6326901	6326901	6326901	6326901	6326901	6326901	6326901	6326901	6326901	
Somme	4327409	4327371	4771072	5212345	5516527	5525961	5696681	5983406	6106792	6123883	6123870	6131103	
$\frac{\Theta}{\Sigma\Theta}(\Sigma\Theta_1-\Sigma\Theta)$	-0,027086	-0,027086	-0,029999	-0,033207	-0,035617	-0,035694	-0,037125	-0,039659	-0,040802	-0,040963	-0,040963	-0,041031	-0,429232
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,348779	2,353887	2,448260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	28,306066
ϑ_1	1,759115	1,759100	1,948321	2,156676	2,313162	2,318193	9,411135	2,575692	2,649919	2,660368	2,660359	2,664794	27,876834
$L\left(\frac{\Theta}{\Sigma\Theta}\right)$	8000508	8000470	8444171	8885444	9189626	9199060	9369780	9656505	9779891	9796989	9796969	9804202	
$L(\Sigma\Theta-\Sigma\Theta_2)$	5793296	5793296	5793296	5793296	5793296	5793296	5793296	5793296	5793296	5793296	5793296	2793296	
Somme	3793804	3793766	4237467	4678740	4982922	4992356	5163076	5449801	5573187	5590278	5590265	5597498	
$\frac{\Theta}{\Sigma\Theta}(\Sigma\Theta_2-\Sigma\Theta)$	-0,023951	-0,023951	-0,026531	-0,029368	-0,031499	-0,031567	-0,032833	-0,035074	-0,036084	-0,036227	-0,036227	-0,036287	-0,379605
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,348779	2,353887	2,448260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701822	2,705825	28,306066
ϑ_2	1,762217	1,762232	1,951789	2,160515	2,317280	2,322320	2,415427	2,580277	2,654637	2,665104	2,665095	2,669538	27,926461
$L\left(\frac{\Theta}{\Sigma\Theta}\right)$	8000508	8000470	8444171	8885444	9189626	9199060	9369780	9656505	9779891	9796982	9796969	9804202	
$L(\Sigma\Theta-\Sigma\Theta_3)$	3894621	3894621	3894621	3894621	3894621	3894621	3894621	3894621	3894621	3894621	3894621	3894621	
Somme	1895129	1895091	2338792	2780035	3084017	3093681	3264401	3551126	3674512	3691603	3691590	3698823	
$\frac{\Theta}{\Sigma\Theta}(\Sigma\Theta_3-\Sigma\Theta)$	-0,015471	-0,015471	-0,017135	-0,018967	-0,020343	-0,020388	-0,021205	-0,022652	-0,023305	-0,023397	-0,023897	-0,023436	-0,245167
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,348779	2,353887	2,448260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	28,306066
ϑ_3	1,770730	1,770715	1,961185	2,170916	2,328136	2,333199	2,127055	2,592699	2,667416	2,677931	2,677925	2,682389	28,060899

$L\left(\frac{\Theta}{\Sigma\Theta}\right)$	8000508	8000470	8444171	8885414	9189626	9199060	9369780	9656505	9779891	9796982	9796969	9804202	
$L(\Sigma\Theta-\Sigma\Theta_4)$	8488232	8488232	8488232	8488232	8488232	8488232	8488232	8488232	8488232	8488232	8488232	8488232	
Somme	6488740	6488702	6932403	7373646	7677858	7687292	7858012	8144737	8268123	8285214	8285201	8292434	
$\frac{\Theta}{\Sigma\Theta}(\Sigma\Theta_4-\Sigma\Theta)$	-0,004455	-0,004455	-0,004934	-0,005462	-0,005858	-0,005871	-0,006107	-0,006523	-0,006711	-0,006738	-0,006738	-0,006749	-0,070601
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,318779	2,353887	2,448260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	28,306066
ϑ_4	1,781746	1,781731	1,973386	2,184421	2,312921	2,348016	2,442153	2,608828	2,684010	2,694593	2,694584	2,699079	28,235465
$L\left(\frac{\Theta}{\Sigma\Theta}\right)$	8000508	8000470	8444171	8885414	9189626	9199060	9369780	9656505	9779891	9796982	9796969	9804202	
$L(\Sigma\Theta-\Sigma\Theta_5)$	9339881	9339881	9339881	9339881	9339881	9339881	9339881	9339881	9339881	9339881	9339881	9339881	
Somme	7340389	7340351	7784052	8225295	8529507	8538941	8709661	8996386	9119772	9136863	9136850	9144083	
$\frac{\Theta}{\Sigma\Theta}(\Sigma\Theta_5-\Sigma\Theta)$	0,005420	0,005420	0,006004	0,006646	0,007128	0,007143	0,007430	0,007937	0,008165	0,008198	0,008198	0,008211	0,085900
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,318779	2,353887	2,448260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	28,306066
ϑ_5	1,791621	1,791606	1,984324	2,196529	2,335907	2,361030	2,455690	2,623288	2,698886	2,709529	2,709520	2,714036	28,391966
$L\left(\frac{\Theta}{\Sigma\Theta}\right)$	8000508	8000470	8444171	8885414	9189626	9199060	9369780	9656505	9779891	9796982	9796969	9804202	
$L(\Sigma\Theta-\Sigma\Theta_6)$	5866166	5866166	5866166	5866166	5866166	5866166	5866166	5866166	5866166	5866166	5866166	5866166	
Somme	3866674	3866636	4310337	4751580	5055792	5065226	5235946	5522671	5646057	5663148	5663135	5670368	
$\frac{\Theta}{\Sigma\Theta}(\Sigma\Theta_6-\Sigma\Theta)$	0,024359	0,024359	0,026979	0,029865	0,032032	0,032101	0,033388	0,035667	0,036695	0,036840	0,036840	0,036901	0,386026
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,318779	2,353887	2,448260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	28,306066
ϑ_6	1,810560	1,810545	2,005299	2,219748	2,350811	2,385988	2,481648	2,651018	2,727416	2,738171	2,738162	2,742726	28,692092
$L\left(\frac{\Theta}{\Sigma\Theta}\right)$	8000508	8000470	8444171	8885414	9189626	9199060	9369780	9656505	9779891	9796982	9796969	9804202	
$L(\Sigma\Theta-\Sigma\Theta_7)$	8146977	8146977	8146977	8146977	8146977	8146977	8146977	8147977	8146977	8146977	8146977	8146977	
Somme	6147485	6147447	6591148	7032391	7336603	7346037	7516757	7803472	7926868	7943959	7943946	7951179	
$\frac{\Theta}{\Sigma\Theta}(\Sigma\Theta_7-\Sigma\Theta)$	0,011186	0,011186	0,045616	0,050494	0,054158	0,054275	0,056452	0,060304	0,062042	0,062287	0,062287	0,062390	0,652677
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,318779	2,353887	2,448260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	28,306066
ϑ_7	1,827387	1,827372	2,023936	2,240377	2,372937	2,408162	2,504712	2,675655	2,752763	2,763618	2,763609	2,768215	28,958743

Si l'on retranche les valeurs précédentes de ϑ_1, ϑ_2,... des valeurs de Θ_1, Θ_2,... fournies par le 6e tableau, on obtiendra pour restes les diverses valeurs de $\Delta\Theta_i$ que nous allons présenter.

XI. TABLEAU.

Détermination des valeurs de $\Delta\Theta_i$.

	Eau		Solution de potasse.	Huile de térébenthine.	Crownglass			Flintglass					Sommes.
	1re Série.	2e Série.			1re espèce	2e espèce.	3e espèce.	1re espèce	2e espèce.	3e espèce. 1re Série.	3e espèce. 2e Série.	1e espèce.	
ϑ_1	1,759115	1,759100	1,948321	2,156676	2,313162	2,318193	2,411135	2,575692	2,649919	2,660368	2,660359	2,664794	27,876834
Θ_1	1,771386	1,771500	1,958961	2,162360	2,323527	2,328164	2,417322	2,566538	2,635981	2,645712	2,645816	2,649568	27,876836
$\Delta\Theta_1$	0,012272	0,012400	0,010640	0,005684	0,010365	0,009971	0,006187	-0,009154	-0,013938	-0,014656	-0,014543	-0,015226	0,000002
ϑ_2	1,762247	1,762232	1,951789	2,160515	2,317280	2,422320	2,415427	2,580277	2,654637	2,665104	2,665095	2,669538	27,926461
Θ_2	1,773457	1,773449	1,961442	2,165402	2,326538	2,331269	2,420927	2,572175	2,642177	2,651854	2,651912	2,655861	27,926463
$\Delta\Theta_2$	0,011210	0,011217	0,009653	0,004887	0,009258	0,008949	0,005500	-0,008102	-0,012460	-0,013250	-0,013183	-0,013677	0,000002
ϑ_3	1,770730	1,770715	1,961185	2,170916	2,328436	2,333499	2,427055	2,592699	2,667416	2,677934	2,677925	2,682389	28,060899
Θ_3	1,778429	1,778429	1,967862	2,173955	2,334730	2,339637	2,430716	2,587255	2,658808	2,668865	2,668869	2,673344	28,060899
$\Delta\Theta_3$	0,007699	0,007714	0,006677	0,003039	0,006294	0,006138	0,003661	-0,005444	-0,008608	-0,009069	-0,009056	-0,009045	0
ϑ_4	1,781746	1,781731	1,973386	2,184421	2,342921	2,348016	2,442153	2,608828	2,684010	2,694593	2,694584	2,699076	28,235465
Θ_4	1,784497	1,784492	1,675801	2,185528	2,345101	2,350105	2,443438	2,606712	2,680936	2,691384	2,691225	2,696244	23,235463
$\Delta\Theta_4$	0,002751	0,002761	0,002415	0,001107	0,002180	0,002089	0,001285	-0,002116	-0,003074	-0,003209	-0,003359	-0,002832	-0,000002
ϑ_5	1,701621	1,791606	1,984324	2,196529	2,355907	2,361030	2,455690	2,623288	2,698886	2,709529	2,709520	2,714036	28,391966
Θ_5	1,789757	1,789677	1,982695	2,195543	2,354190	2,359457	2,454677	2,624535	2,700981	2,711886	2,711806	2,716761	28,391965
$\Delta\Theta_5$	-0,001864	-0,001929	-0,001629	-0,000986	-0,001717	-0,001573	-0,001013	0,001247	0,002095	0,002357	0,002286	0,002725	-0,000001
ϑ_6	1,810560	1,810545	2,005299	2,219748	2,380811	2,385988	2,481648	2,651018	2,727416	2,738171	2,738164	2,742726	28,692092
Θ_6	1,799068	1,798981	1,995381	2,214734	2,371317	2,376707	2,476012	2,659418	2,740370	2,751781	2,751776	2,756547	28,692092
$\Delta\Theta_6$	-0,011492	-0,011564	-0,009918	-0,005014	-0,009494	-0,009281	-0,005636	0,008400	0,012954	0,013610	0,013614	0,013821	0
ϑ_7	1,827387	1,827372	2,023936	2,240377	2,402937	2,408162	2,504712	2,675655	2,752763	2,763618	2,763609	2,768215	28,958743
Θ_7	1,806813	1,806772	2,006099	2,231661	2,386049	2,391867	2,494726	2,690825	2,775796	2,787832	2,787853	2,792449	28,958742
$\Delta\Theta_7$	-0,020574	-0,020600	-0,017837	-0,008716	-0,015888	-0,016295	-0,009986	0,015170	0,023033	0,024214	0,024244	0,024234	-0,000001

Les nombres compris dans la dernière colonne verticale du 11[e] tableau servent à prouver la justesse de nos calculs. Car ces nombres, qui représentent les diverses valeurs de

$$\Sigma\vartheta_i, \quad \Sigma\Theta_i, \quad \Sigma\Delta\Theta_i,$$

vérifient avec une exactitude suffisante les équations

$$\Sigma\vartheta_1 = \Sigma\Theta_1, \quad \Sigma\vartheta_2 = \Sigma\Theta_2, \ldots \ldots \Sigma\vartheta_7 = \Sigma\Theta_7,$$
$$\Sigma\Delta\Theta_1 = 0, \quad \Sigma\Delta\Theta_2 = 0, \ldots \ldots \Sigma\Delta\Theta_7 = 0,$$

que l'on déduit immédiatement des formules (114) et (113).

Les valeurs de $\Delta\Theta_i$, que fournit le onzieme tableau, étant, abstraction faite des signes, bien supérieures aux variations de Θ_i renfermées dans les 4[e] et 7[e] lignes horizontales du septième tableau, il en résulte qu'on ne peut, sans erreur sensible, réduire les seconds membres des formules (1) et (9) à leurs premiers termes et la formule (42) à la formule (56). Au reste nous avions déjà pressenti ce résultat, en nous fondant sur cette seule considération que, s'il en était autrement, la dispersion se trouverait anéantie.

En partant du 11[e] tableau, on déterminera sans peine, à l'aide des formules (120), (121) et (113), les diverses valeurs de $l_1, l_2, \ldots l_7$; $\vartheta_1', \vartheta_2', \ldots \vartheta_7'$; $\Delta'\Theta_1, \Delta'\Theta_2, \ldots \Delta'\Theta_7$. Alors $S'\Delta\Theta_i$ désignera la somme des valeurs numériques de $\Delta\Theta_i$ relatives aux divers rayons, mais seulement à l'une des substances, à l'eau par exemple, de sorte qu'on aura

$$(129) \qquad S'\Delta\Theta_i = \Delta\Theta_1 + \Delta\Theta_2 + \Delta\Theta_3 + \Delta\Theta_4 - \Delta\Theta_5 - \Delta\Theta_6 - \Delta\Theta_7;$$

et $\Sigma S'\Delta\Theta_i$ représentera la somme des valeurs numériques de $S'\Delta\Theta_i$, c'est à dire évidemment, la somme des valeurs de $\Delta\Theta_i$ prises avec le signe — lorsqu'elles se rapportent à l'une des espèces de flintglass, et avec le signe + dans le cas contraire. Cela posé, on déduira des formules (120), (121) et (113) les résultats compris dans les tableaux suivants.

XII. TABLEAU.

Valeurs de $S'\Delta\Theta_i$, $\Sigma'\Delta\Theta_i$, $\Sigma S'\Delta\Theta_i$ *et* β_i.

	$\Delta\Theta_1$	$\Delta\Theta_2$	$\Delta\Theta_3$	$\Delta\Theta_4$	$\Delta\Theta_5$	$\Delta\Theta_6$	$\Delta\Theta_7$	$\Delta\Theta_1+\Delta\Theta_2+\Delta\Theta_3+\Delta\Theta_4$	$\Delta\Theta_5+\Delta\Theta_6+\Delta\Theta_7$	$S\Delta\Theta_i$	$S'\Delta\Theta_i$	$L(S'\Delta\Theta_i)$
Eau, 1re série	0,012272	0,011240	0,007699	0,003751	-0,001864	-0,011498	-0,020374	0,033932	-0,033930	0,000002	0,067862	8316267
Eau, 2e série	0,012100	0,011217	0,007711	0,002761	-0,001929	-0,011564	-0,020600	0,034092	-0,034093	-0,000001	0,068185	8336888
Solution de potasse	0,010640	0,009653	0,006677	0,002415	-0,001629	-0,009918	-0,017837	0,029385	-0,029384	0,000001	0,058769	7691483
Huile de térébenthine	0,005684	0,004887	0,003039	0,001107	-0,000986	-0,005014	-0,008716	0,014717	-0,014716	0,000001	0,029433	4688315
Crownglass, 1re espèce	0,010365	0,009258	0,006294	0,002180	-0,001717	-0,009194	-0,016888	0,028097	-0,028099	-0,000002	0,056196	7497054
Crownglass, 2e espèce	0,009971	0,008919	0,006188	0,002089	-0,001573	-0,009281	-0,016295	0,027147	-0,027149	-0,000002	0,054296	7347678
Crownglass, 3e espèce	0,006187	0,005500	0,003661	0,001285	-0,001013	-0,005636	-0,009986	0,016633	-0,016635	-0,000002	0,033268	5220267
Flintglass, 1re espèce	-0,009151	-0,008102	-0,005441	-0,002116	0,001247	0,008400	0,015170	-0,024816	0,024817	0,000001	-0,049633	6957705
Flintglass, 2e espèce	-0,018938	-0,012460	-0,008608	-0,003071	0,002095	0,012951	0,023033	-0,038080	0,038082	0,000002	-0,076162	8817383
Flintglass, 3e espèce, 1re série	-0,011656	-0,013250	-0,009069	-0,003209	0,002337	0,013610	0,021214	-0,040184	0,040181	-0,000003	-0,080365	9050669
Flintglass, 3e espèce, 2e série	-0,011513	-0,013183	-0,009056	-0,003359	0,002286	0,013611	0,021241	-0,040141	0,040111	0,000003	-0,080285	9046341
Flintglass, 4e espèce	-0,015226	-0,013677	-0,009045	-0,002832	0,002725	0,013821	0,021231	-0,040780	0,040780	0	-0,081560	9111772
Sommes, Eau...crowngl.	0,067519	0,060671	0,041222	0,011588	-0,010711	-0,062399	-0,110896				0,368009	
Sommes, Flintglass	-0,067517	-0,060672	-0,041222	-0,011590	0,010710	0,062399	0,110895				-0,368005	
$\Sigma\Delta\Theta_i$	0,000002	0,000002	0	-0,000002	-0,000001	0	-0,000001			$\Sigma S'\Delta\Theta_i$	0,000001	
$\Sigma'\Delta\Theta_i$	0,135036	0,121316	-0,082411	0,029178	-0,021121	-0,121798	-0,221791			$\Sigma' S'\Delta\Theta_i$	0,736014	
	1304303 191	0840040 215	9161591	4650555	8308397	0961798 279	3159420 20				8668837 24	
$L(\pm\Sigma'\Delta\Theta_i)$	1304497	0840255	9161591	4650555	8308397	0962077	3159440				8668861	
$L(\Sigma S'\Delta\Theta_i)$	8668861	3668861	8668861	8668861	8668861	8668861	8668861					
$L(\beta_i)$	2635636 5114 222	2171394 1153 241	0492730 2568 162	5981691 1665 29	4639536 9527 9	2293216 2978 238	4790579 0568 11	$\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4$	$\beta_5+\beta_6+\beta_7$	$S\beta_i$	$S'\beta_i$	
β_i	0,183469	0,161869	0,112011	0,039643	-0,029104	-0,169359	-0,301841	0,499995	-0,500001	0,000009	0,999999	

Comme on devait s'y attendre, les nombres obtenus dans le 12e tableau vérifient rigoureusement les deux conditions

$$S\Sigma\Delta\Theta_i = \Sigma S\Delta\Theta_i, \quad S'\Sigma'\Delta\Theta_i = \Sigma' S'\Delta\Theta_i,$$

et, avec une exactitude suffisante, celles que comprennent les formules

$$\Sigma\Delta\Theta_i = 0, \quad \Sigma\Delta\Theta_i = 0, \quad S'\Sigma\Delta\Theta_i = \Sigma S'\Delta\Theta_i = 0, \quad S\beta_i = 0, \quad S'\beta_i = 1;$$

ce qui prouve la justesse de nos calculs.

XIII. TABLEAU.

Valeurs de ϑ_i' et de $\Delta^2\Theta_i$ exprimées en millionièmes.

	Eau 1. série.	Eau 2. série.	Solution de potasse.	Huile de térébenthine.	Crownglass 1. espèce.	Crownglass 2. espèce.	Crownglass 3. espèce.	Flintglass 1. espèce.	Flintglass 2. espèce.	Flintglass 3. espèce. 1. série.	Flintglass 3. espèce. 2. série.	Flintglass 4. espèce.	Sommes.
$L(S'\Delta\Theta_i)$ $L(\beta_1)$	8316267 2635636	8336888 2635636	7691183 2635636	4688315 2635636	7197054 2635636	7347678 2635636	5220267 2635636	6957705 2635636	8817383 2635636	9050669 2635636	9046344 2635636	9114772 2635636	
$L(\pm\vartheta_1')$	0951903	0972521	0327119	7323981	0132690	9983314	7855903	9593341	1453019	1686305	1681980	1750408	
ϑ_1' $\Delta\Theta_1$	12451 12272	12510 12100	10782 10610	5100 5684	10310 10365	9962 9971	6104 6187	-9106 -9151	-13973 -13938	-14715 -14656	-14730 -14543	-14961 -15226	0,000001 0,000002
$\Delta^2\Theta_1$	-179	-110	-142	284	55	9	83	-48	35	89	187	-262	0,000001
$L(S'\Delta\Theta_i)$ $L(\beta_2)$	8316267 2171391	8336888 2171391	7691183 2171391	4688315 2171391	7197054 2171391	7347678 2171391	5220267 2171391	6957705 2171391	8817383 2171391	9050669 2171391	9046344 2171391	9114772 2171391	
$L(\pm\vartheta_2')$	0187661	0508282	9862577	6859739	9668118	8519092	7391661	9129099	0988777	1222063	1217738	1286166	
ϑ_2' $\Delta\Theta_2$	11488 11240	11212 11217	9689 9653	4852 4887	9265 9258	8952 8919	5485 5500	-8183 -8102	-12557 -12460	-13250 -13250	-13237 -13183	-13447 -13677	-0,000001 0,000002
$\Delta^2\Theta_2$	22	-25	-36	35	-7	-3	15	81	97	0	54	-230	0,000003
$L(S'\Delta\Theta_i)$ $L(\beta_3)$	8316267 0192730	8336888 0192730	7691183 0192730	4688315 0192730	7197054 0192730	7347678 0192730	5220267 0192730	6957705 0192730	8817383 0192730	9050669 0192730	9046344 0192730	9114772 0192730	
$L(\pm\vartheta_3')$	8808997	8829618	8181213	5181075	7989781	7840108	5712997	7150135	9310113	9543399	9539071	9607502	
ϑ_3' $\Delta\Theta_3$	7602 7699	7638 7714	6583 6677	3297 3039	6295 6294	6082 6138	3726 3661	-5560 -5444	-8531 -8608	-9002 -9069	-8993 -9056	-9136 -9045	0,000001 0
$\Delta^2\Theta_3$	97	76	94	-258	-1	56	-65	116	-77	-67	-63	91	-0,000001

$L(S'\Delta\Theta_i)$ $L(\beta_4)$	8216267 5981691	8336888 5981691	7691483 5981691	4688315 5981691	7197051 5981691	7317678 5981691	5220267 5981691	6957705 5981691	8817383 5981691	9050669 5981691	9016314 5981691	9114772 5981691	
$L(\pm\vartheta_4')$	4297961	4318582	3673177	0670039	3478718	3329372	1201961	2939399	4799077	5032363	5028038	5096466	
ϑ_4' $\Delta\Theta_4$	2690 2751	2703 2761	2330 2115	1167 1107	2228 2180	2152 2089	1319 1285	-1967 -2116	-3019 -3074	-3186 -3209	-3183 -3359	-3233 -2832	0,000001 -0,000002
$\Delta^2\Theta_4$	61	58	85	-60	-48	-63	-31	-149	-55	-23	-176	401	-0,000003
$L(S'\Delta\Theta_i)$ $L(\beta_5)$	8316267 4639536	8336888 4639536	7691483 4639536	4688315 4939536	7197051 4639536	7317678 4639536	5220267 4639536	6957705 4639536	8817383 4639536	9050669 4639536	9016314 4639536	9114772 4639536	
$L(\pm\vartheta_5')$	2955803	2976124	2331019	9327881	2136590	1987214	9859803	1597211	3156919	3690205	3685880	3751308	
ϑ_5' $\Delta\Theta_5$	-1975 -1861	-1985 -1929	-1710 -1629	-857 -986	-1636 -1717	-1580 -1573	-968 -1013	1115 1247	2217 2095	2339 2357	2337 2286	2374 2725	0,000001 -0,000001
$\Delta^2\Theta_5$	111	56	81	-129	-81	7	-15	-198	-122	18	-51	351	-0,000002
$L(S'\Delta\Theta_i)$ $L(\beta_6)$	8316267 2293216	8336888 2293216	7691483 2293216	4688315 2293216	7197051 2293216	7347678 2293216	5220267 2293216	6957705 2293216	8817383 2293216	9050669 2293216	9016341 2293216	9114772 2293216	
$L(\pm\vartheta_6')$	0609183	0630101	9981699	6981561	9790270	9610894	7513183	9250921	1110399	1313885	1339560	1107988	
ϑ_6' $\Delta\Theta_6$	-11507 -11492	-11561 -11501	-9965 -9918	-4991 -5011	-9529 -9491	-9206 -9281	-5611 -5636	8116 8100	12911 12951	13627 13610	13613 13611	13829 13821	-0,000001 0
$\Delta^2\Theta_6$	15	-3	47	-23	35	-75	5	-16	40	-17	1	-8	0,000001
$L(S'\Delta\Theta_i)$ $L(\beta_7)$	8316267 4790579	8336883 4790579	7691483 4790579	4688315 4790579	7197051 4790579	7317678 4790579	5220267 4790579	6957705 4790579	8817383 -4790579	9050669 4790579	9016311 4790579	9114772 4790579	
$L(\pm\vartheta_7')$	3106846	3127467	2182062	9178921	2287633	2138257	0010816	1748281	3607962	3811248	3836923	3903351	
ϑ_7' $\Delta\Theta_7$	-20450 -20571	-20547 -20600	-17709 -17837	-8869 -8716	-16931 -16838	-16362 -16295	-10025 -9986	11956 15170	22951 23033	24217 24214	24193 24241	21577 21231	-0,000002 -0,000001
$\Delta^2\Theta_7$	-121	-53	-128	153	46	67	39	211	82	-3	51	-313	0,000001

Dans le 13ᵉ tableau, les valeurs de

$$\vartheta_i', \quad \Delta\Theta_i, \quad \Delta^2\Theta_i$$

sont exprimées en millionièmes. Ainsi, par exemple, de ce que dans la première colonne verticale les valeurs de

$$\vartheta_1', \quad \Delta\Theta_1, \quad \Delta^2\Theta_1$$

se trouvent représentées par les quantités

$$12451, \quad 12272, \quad -179$$

on doit en conclure que l'on a, pour l'eau [1ʳᵉ Série]

$$\vartheta_1' = 0{,}012451, \quad \Delta\Theta_1 = 0{,}012272, \quad \Delta^2\Theta_1 = -0{,}000179,$$

ou, ce qui revient au même,

$$1000000\,\vartheta_1' = 12451, \quad 1000000\,\Delta\Theta_1 = 12272, \quad 1000000\,\Delta^2\Theta_1 = -179.$$

D'ailleurs, comme, dans le même tableau, plusieurs des valeurs de $\Delta^2\Theta_i$, particulièrement celles qui sont relatives à l'huile de térébenthine, ainsi qu' à la première et à la quatrième espèce de flintglass, sont, abstraction faite des signes, notablement supérieures aux variations de Θ_i renfermées dans les 4ᵉ et 7ᵉ lignes horizontales du 7ᵉ tableau, on doit en conclurre qu'on ne peut, sans erreur sensible, réduire le second membre de la formule (1) ou (9) à ses deux premiers termes, et la formule (42) à la formule (72).

Concevons maintenant que l'on designe par

$$\mathrm{S}''\Delta^2\Theta_i$$

la somme des valeurs de $\Delta^2\Theta_i$ relatives aux divers rayons, mais seulement à l'une des substances, par exemple, à la solution de potasse que nous choisirons ici de préférence, attendu que cette substance est celle pour laquelle la plus petite des valeurs numériques de $\Delta^2\Theta_i$ est la plus grande possible, et que généralement on doit moins craindre de voir un changement de signe produit par les erreurs d'observation dans la valeur de $\Delta\Theta_i$, lorsque cette valeur s'éloigne davantage de zéro. On aura

$$(130) \quad \mathrm{S}''\Delta^2\Theta_i = -\Delta^2\Theta_1 - \Delta^2\Theta_2 + \Delta^2\Theta_3 + \Delta^2\Theta_4 + \Delta^2\Theta_5 + \Delta^2\Theta_6 - \Delta^2\Theta_7;$$

et, en désignant par

$$\Sigma''\mathrm{S}''\Delta^2\Theta_i$$

la somme des valeurs numériques de $\mathrm{S}''\Delta^2\Theta_i$ relatives aux diverses substances, on déterminera sans peine, à l'aide des formules (114) et (113), les valeurs de

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots \gamma_7; \quad \vartheta_1'', \vartheta_2'', \ldots\ldots \vartheta_7''; \quad \Delta^2\Theta_1, \Delta^2\Theta_2, \ldots\ldots \Delta^2\Theta_7$$

telles que les présentent les deux tableaux que nous allons tracer.

XIV. TABLEAU.

Valeurs de $S''\Delta^2\Theta_i$, $\Sigma'\Delta^2\Theta_i$ *et* $\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i$.

	$\Delta^2\Theta_1$	$\Delta^2\Theta_2$	$\Delta^2\Theta_3$	$\Delta^2\Theta_4$	$\Delta^2\Theta_5$	$\Delta^2\Theta_6$	$\Delta^2\Theta_7$	$\Delta^2\Theta_3+\Delta^2\Theta_4$ $+\Delta^2\Theta_5+\Delta^2\Theta_6$	$\Delta^2\Theta_1$ $+\Delta^2\Theta_2+\Delta^2\Theta_7$	$S\Delta^2\Theta i$	$S''\Delta^2\Theta_i$	$L(\pm S''\Delta^2\Theta i)$
Eau, 1re série	-0,000179	0,000022	0,000097	0,000061	0,000111	0,000015	-0,000124	0,000281	-0,000281	0,000003	0,000565	7520484
Eau, 2e série	-0,000110	-0,000025	0,000076	0,000058	0,000056	-0,000003	-0,006053	0,000187	-0,000188	-0,000001	0,000375	5740313
Solution de potasse	-0,000112	-0,000036	0,000094	0,000085	0,000081	0,000047	-0,000128	0,000307	-0,000306	0,000001	0,000643	7874605
Huile de térébenthine	0,000284	0,000035	-0,000258	-0,000060	-0,000129	-0,000023	0,000153	-0,000470	0,000472	0,000002	-0,000942	9740509
Crownglass, 1re espèce	0,000055	-0,000007	-0,000001	-0,000018	-0,000084	0,000035	0,000046	-0,000095	0,000094	-0,000001	-0,000189	2764618
Crownglass, 2e espèce	0,000009	-0,000003	0,000056	-0,000063	0,000007	-0,000075	0,000067	-0,000075	0,000073	-0,000002	-0,000118	1702617
Crownglass, 3e espèce	0,000053	0,000015	-0,000065	-0,000034	-0,000045	0,000005	0,000039	-0,000139	0,000137	-0,000002	-0,000276	4409094
Flintglass, 1re espèce	-0,000018	0,000081	0,000116	-0,000119	-0,000198	-0,000016	0,000214	-0,000247	0,000247	0	-0,000494	6937269
Flintglass, 2e espèce	0,000035	0,000097	-0,000077	-0,000055	-0,000122	0,000040	0,000082	-0,000214	0,000211	0	-0,000128	6314438
Flintglass, 3e espèce, 1. série	0,000089	0	-0,000067	-0,000023	0,000018	-0,000017	-0,000008	-0,000089	0,000086	-0,000003	-0,000175	2130380
Flintglass, 3e espèce, 2. série	0,000187	0,000054	-0,000063	-0,000176	-0,000051	0,000001	0,000051	-0,000289	0,000292	0,000003	-0,000581	7641761
Flintglass, 4e espèce	-0,000262	-0,000230	0,000091	0,000101	0,000331	-0,000008	-0,000343	0,000835	-0,000835	0	0,001670	2227165
Sommes: Eau, potasse, Flingl. 4e esp.	-0,000693	-0,000269	0,000358	0,000605	0,000599	0,000051	-0,000648				0,003223	
Sommes: Les autres substances	0,000691	0,000272	-0,000359	-0,000608	-0,000601	-0,000050	0,000649				-0,003233	
$\Sigma\Delta^2\Theta_i$	0,000001	0,000003	-0,000001	-0,000003	-0,000002	0,000001	0,000001			$\Sigma S''\Delta^2\Theta_i$	0,000010	
$\Sigma''\Delta^2\Theta_i$	-0,001387	-0,000341	0,000717	0,001213	0,001200	0,000101	-0,001297			$\Sigma''S''\Delta^2\Theta i$	0,006156	
$L(\mp\Sigma''\Delta^2\Theta_i)$ $L(\Sigma''S''\Delta\Theta_i)$	1120765 8099635	7331973 8099635	8555192 8099635	0838608 8099635	0791812 8099635	0043214 8099635	1129400 8099635				8099635	
Différence	3321130	9232338	0455557	2738973	2692177	1943579	3029765	$\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5+\gamma_6$	$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_7$	$S\gamma i$	$S''\gamma i$	
γ_i	-0,24481	-0,08380	0,11106	0,18789	0,18587	0,01564	-0,20090	0,50046	-0,49954	0,00092	1,00000	

Comme on devait s'y attendre, les nombres compris dans ce tableau vérifient rigoureusement les deux conditions

$$S''\Sigma\Delta^2\Theta_i = \Sigma S''\Delta^2\Theta_i, \qquad S''\Sigma'\Delta^2\Theta_i = \Sigma''S''\Delta^2\Theta_i,$$

et, avec une exactitude suffisante, celles que comprennent les formules

$$S\Delta^2\Theta_i = 0, \quad \Sigma\Delta^2\Theta_i = 0, \quad S''\Sigma\Delta^2\Theta_i = \Sigma S'\Delta^2\Theta_i, \quad S\theta_i = 0, \quad S'\theta_i = 0, \quad S''\theta_i = 1,$$

ce qui prouve la justesse de nos calculs.

XV. TABLEAU.

Valeurs de ϑ_i'' et de $\Delta^2\Theta_i$ exprimées en millionièmes.

	Eau		Solution de potasse.	Huile de térében-thine.	Crownglass			Flintglass					Sommes.
	1. Série.	2. Série.			1.espèce.	2.espèce.	3.espèce.	1.espèce.	2.espèce.	3.espèce. 1. Série.	3.espèce. 2. Série.	4.espèce.	
$L(\pm S''\Delta^2\Theta_i)$ $L(-\gamma_1)$	7520181 3321130	5710313 3321130	7874605 3321130	9740509 3321130	2764618 3321130	1702617 3321130	4409091 3321130	6937269 3321130	6311438 3321130	2430380 3321130	7611761 3321130	2227165 3321130	
$L(\mp\vartheta_1'')$	0811611	9061413	1195735	3061639	6085748	5023747	7730221	0258399	9635568	5751510	0962891	5518295	
ϑ_1'' $\Delta^2\Theta_1$	-121 -170	-81 -110	-132 -142	202 251	41 55	32 9	59 83	106 -48	92 35	38 89	125 187	-359 -262	0,000002 0,000001
$\Delta^2\Theta_1$	-58	-29	-10	82	14	-23	21	-151	-57	51	62	97	-0,000001
$L(\pm S''\Delta^2\Theta_i)$ $L(-\gamma_2)$	7520184 9232338	5740313 9232338	7874605 9232338	9710509 9232338	2761618 9232338	1702617 9232338	4409091 9232338	6937269 9232338	6314438 9232338	2430380 9232338	7641761 9232338	2227165 9232338	
$L(\mp\vartheta_2'')$	6752822	4972651	7106913	8972817	1996956	0934955	3611429	6169607	5346776	1662718	6874099	1439503	
ϑ_2'' $\Delta^2\Theta_2$	-47 22	-31 -25	-51 -36	79 35	16 -7	12 -3	23 15	41 81	36 97	15 0	49 54	-140 -230	0,000002 0,000003
$\Delta^2\Theta_2$	69	6	15	-41	-23	-15	-8	40	61	-15	5	-90	0,000001
$L(\pm S''\Delta^2\Theta_i)$ $L(\gamma_3)$	7520484 0455557	5740313 0155537	7874605 0155557	9410509 0155557	2761618 0155557	1702617 0155557	4409091 0155557	6937269 0155557	6311438 0455557	2430380 0155557	7611761 0155557	2227165 0155557	
$L(\pm\vartheta_3'')$	7976041	6195870	8330162	0196066	3220175	2158174	4861648	7392826	6769995	2885937	8097318	2682722	
ϑ_3'' $\Delta^2\Theta_3$	63 97	42 76	68 91	-105 -258	-21 -1	-16 56	-31 -65	-55 116	-48 -77	-19 -67	-65 -63	185 91	-0,000002 -0,000001
$\Delta^2\Theta_3$	84	34	26	-133	20	72	-31	171	-29	-48	2	-94	0,000001

$\frac{L(\pm S'' \Delta^2\Theta_i)}{L(\gamma_4)}$	7520181 2738973	5710313 2738973	7871605 2738973	9740509 2738973	2761618 2738973	1702617 2738973	4109091 2738973	6937269 2738973	6311138 2738973	2130380 2738973	7611761 2738973	2227165 2738973	
$L(\pm\vartheta_4'')$	0259157	8179286	0613578	2179182	5503591	4141590	7118061	9676212	9053111	5169333	0380731	1966138	
ϑ_4'' $\Delta^2\Theta_4$	106 61	70 58	115 85	-177 -60	-36 -48	-28 -63	-52 -31	-93 -119	-80 -55	-33 -23	-109 -176	311 401	-0.000003 -0,000003
$\Delta^3\Theta_4$	-45	-12	-30	-117	-12	-35	18	-56	25	10	-67	87	0
$\frac{L(\pm S'' \Delta^2\Theta_i)}{L(\gamma_5)}$	7520184 2692177	5710313 2692177	7871605 2692177	9740509 2692177	2761618 2692177	1702617 2692177	1109091 2692177	6937269 2692177	6311138 2692177	2130380 2692177	7611761 2692177	2227165 2692177	
$L(\pm\vartheta_5'')$	0212661	8132190	0566782	2132686	5456795	4291791	7101268	9629116	9006515	5122557	0333938	1919312	
ϑ_5'' $\Delta^2\Theta_5$	105 111	70 56	114 81	-175 -129	-35 -81	-28 7	-51 -15	-92 -193	-80 -122	-33 18	-108 -51	310 351	-0,000003 -0,000002
$\Delta^3\Theta_5$	6	-11	-33	46	-16	35	6	106	-42	51	57	41	0,000001
$\frac{L(\pm S'' \Delta^2\Theta_i)}{L(\gamma_6)}$	7520184 1913579	5710313 1913579	7874605 1913579	9740509 1913579	2761618 1913579	1702617 1913579	4109091 1913579	6937269 1913579	6311138 1913579	2130380 1913579	7611761 1913579	2227165 1913579	
$L(\pm\vartheta_6'')$	9464063	7633892	9818184	1684088	4708197	3616196	6352670	8880848	8258017	1373939	9585310	1170711	
ϑ_6'' $\Delta^2\Theta_6$	9 15	6 -3	10 47	-15 -23	-3 35	-2 -75	-1 5	-8 -16	7 -40	-3 -17	-9 1	26 -8	0 -0,000001
$\Delta^3\Theta_6$	6	-9	37	-8	38	-73	9	-8	47	-11	10	-34	0,000001
$\frac{L(\pm S'' \Delta^2\Theta_i)}{L(-\gamma_7)}$	7520181 3029765	5710313 3029765	7871605 3029765	9740509 3029765	2761618 3029765	1702617 3029765	1109091 3029765	6937269 3029765	6311138 3029765	2130380 3029765	7611761 3029765	2227165 3029765	
$L(\mp\vartheta_7'')$	0550249	8770078	0901370	2770271	5794383	4732382	7438856	9967034	9311203	5160115	0671526	5256930	
ϑ_7'' $\Delta^2\Theta_7$	-111 -124	-75 -53	-123 -128	189 153	38 46	30 67	55 39	99 211	86 82	35 -3	117 51	-336 -343	0,000001 0,000001
$\Delta^3\Theta_7$	-10	22	-5	-36	8	37	-16	115	-4	-38	-66	-7	0

Dans le 15e tableau, les valeurs de

$$\vartheta_i'', \quad \Delta^2\Theta_i, \quad \Delta^3\Theta_i$$

sont exprimées en millionièmes. Ainsi, par exemple, de ce que, dans la dernière colonne verticale, les valeurs de

$$\vartheta_1'' \text{ et } \vartheta_2''$$

sont représentées par les quantités

$$-121, \quad 63$$

on doit en conclurre que l'on a pour l'eau [1re Série]

$$\vartheta_1'' = -0{,}000121, \quad \vartheta_2'' = 0{,}000063$$

ou, ce qui revient au même,

$$1000000\,\vartheta_1'' = -121, \quad 1000000\,\vartheta_2'' = 63.$$

Parmi les valeurs de $\Delta^3\Theta_i$ que fournit le 15e tableau, une seule 0,000171, relative au troisième rayon et à la première espèce de flintglass, surpasse le nombre 0,000159 qui représente la plus grande des valeurs numériques de Θ_i comprises dans la 7e ligne horizontale du 7e tableau, et ne la surpasse pas assez notablement pour qu'on ne puisse à la rigueur l'attribuer elle même aux erreurs d'observation. Nous pourrions donc nous regarder comme suffisamment autorisés à ne pas pousser plus loin les calculs, et admettre qu'on peut, sans erreur sensible, réduire le second membre de la formule (1) ou (9) à ses trois premiers termes, et la formule (42) à la formule (94). Cependant un examen attentif des valeurs de $\Delta^3\Theta_i$ données par le 15e tableau nous conduit à supposer que dans chacune de ces valeurs il existe une partie indépendante des erreurs d'observation, ordinairement plus grande que ces erreurs, et qu'il est bon de ne pas négliger. Effectivement, si cette supposition est conforme à la réalité, la plupart des différences

$$\Delta^3\Theta_1; \quad \Delta^3\Theta_2, \ldots \Delta^3\Theta_7$$

devront conserver les mêmes signes que leurs valeurs approchées, représentées par

$$\vartheta_1''', \quad \vartheta_2''', \ldots \vartheta_7''';$$

et, comme ces dernières quantités, en vertu des formules (114), conservent toutes les mêmes signes, ou toutes à la fois changent de signes, lorsqu'on passe d'une substance à une autre, les différences

$$\Delta^3\Theta_1, \quad \Delta^3\Theta_2, \ldots \Delta^3\Theta_7$$

devront, sauf quelques exceptions peu nombreuses, remplir la même condition. Or à l'inspection du 15e tableau, on reconnait sans peine 1° que cette condition est rigoureusement remplie, lorsqu'on passe de la 4e espèce de flintglass à la 3e espèce (1re Série) ou à l'huile de térébenthine; 2° que, si pour chacune de ces trois substances l'on nomme $S'''\Delta^3\Theta_i$ la somme des valeurs numériques de $\Delta^3\Theta_i$ relatives

aux divers rayons, et prises en signes contraires, c'est à dire, en d'autres termes, si l'on pose

$$(131)\quad S'''\Delta^2\Theta_i = -\Delta^2\Theta_1 + \Delta^2\Theta_2 + \Delta^2\Theta_3 - \Delta^2\Theta_4 - \Delta^2\Theta_5 + \Delta^2\Theta_6 + \Delta^2\Theta_7,$$

la condition cidessus énoncée sera généralement satisfaite dans le passage d'une substance à une autre, sauf de légères exceptions relatives à un très petit nombre de rayons, et à des valeurs de $\Delta^2\Theta_i$ ordinairement très rapprochées de zéro. Si d'ailleurs on désigne par

$$\Sigma' S'''\Delta^2\Theta_i$$

la somme des valeurs numériques de $\Delta^2\Theta_i$ relatives aux diverses substances, on déterminera aisément, à l'aide des formules (120), (121) et (113), les valeurs de

$$\delta_1,\ \delta_2, \dots \delta_7;\quad \vartheta_1''',\ \vartheta_2''', \dots \vartheta_7''';\quad \Delta^2\Theta_1,\ \Delta^2\Theta_2, \dots \Delta^2\Theta_7$$

telles que les présentent les deux tableaux que nous allons tracer.

XVI. TABLEAU.

Valeurs de $S'''\Delta^2\Theta_i$, $\Sigma'''\Delta^2\Theta_i$ *et* $\Sigma'''S'''\Delta^2\Theta_i$.

	$\Delta^2\Theta_1$	$\Delta^2\Theta_2$	$\Delta^2\Theta_3$	$\Delta^2\Theta_4$	$\Delta^2\Theta_5$	$\Delta^2\Theta_6$	$\Delta^2\Theta_7$	$\Delta^2\Theta_2+\Delta^2\Theta_3+\Delta^2\Theta_6+\Delta^2\Theta_7$	$\Delta^2\Theta_1+\Delta^2\Theta_4+\Delta^2\Theta_5$	$S\Delta^2\Theta i$	$S'''\Delta^2\Theta i$	$L(\pm S'''\Delta^2\Theta i)$
Eau, 1re série	-0,000058	0,000069	0,000034	-0,000015	0,000006	0,000006	-0,000010	0,000099	-0,000097	0,000002	0,000196	2922561
Eau, 2e série	-0,000029	0,000036	0,000031	-0,000012	-0,000014	-0,000009	0,000022	0,000053	-0,000055	-0,000002	0,000108	0331238
Solution de potasse	-0,000010	0,000015	0,000026	-0,000030	-0,000033	0,000037	-0,000005	0,000073	-0,000073	0	0,000146	1643529
Huile de térébenthine	0,000032	-0,000014	-0,000153	0,000117	0,000016	-0,000008	-0,000036	-0,000241	0,000245	0,000001	-0,000486	6866363
Crownglass, 1re espèce	0,000014	-0,000023	0,000020	-0,000012	-0,000046	0,000038	0,000008	0,000043	-0,000044	-0,000001	0,000087	9395193
Crownglass, 2e espèce	-0,000023	-0,000015	0,000072	-0,000035	0,000035	-0,000073	0,000037	0,000021	-0,000023	-0,000002	0,000044	6434527
Crownglass, 3e espèce	0,000021	-0,000008	-0,000034	0,000018	0,000006	0,000009	-0,000016	-0,000019	0,000018	-0,000001	-0,000097	9867717
Flintglass, 1re espèce	-0,000154	0,000010	0,000171	-0,000056	-0,000106	-0,000008	0,000115	0,000318	-0,000316	0,000002	0,000631	8020893
Flintglass, 2e espèce	-0,000057	0,000061	-0,000029	0,000025	-0,000012	0,000047	-0,000004	0,000075	-0,000074	0,000001	0,000149	1731863
Flintglass, 3e espèce, 1. série	0,000051	-0,000015	-0,000018	0,000010	0,000031	-0,000011	-0,000038	-0,000115	0,000112	-0,000003	-0,000227	3560259
Flintglass, 3e espèce, 2. série	0,000062	0,000005	0,000002	-0,000067	0,000057	0,000040	-0,000066	-0,000049	0,000052	0,000003	-0,000101	0043211
Flintglass, 4e espèce	0,000097	-0,000090	-0,000034	0,000087	0,000041	-0,000031	-0,000007	-0,000225	0,000225	0	-0,000450	6532125
Sommes: Eau, potasse, 1re et 2e espèce de crownglass et de flintglass	-0,000317	0,000153	0,000328	-0,000165	-0,000200	0,000038	0,000163				0,001364	
Sommes: Les autres substances	0,000316	-0,000152	-0,000327	0,000165	0,000201	-0,000037	-0,000163				-0,001361	
$\Sigma\Delta^2\Theta_i$	-0,000001	0,000001	0,000001	0	0,000001	0,000001	0			$\Sigma S'''\Delta^2\Theta i$	0,000003	
$\Sigma'''\Delta^2\Theta_i$	-0,000333	-0,000305	-0,000655	0,000330	0,000401	-0,000075	-0,000326			$\Sigma'''S'''\Delta^2\Theta i$	0,002725	
$L(\mp\Sigma'''\Delta^2\Theta_i)$	8011037	4812993	8162113	5185139	6031111	8750613	5132176					
$L(\Sigma'''S'''\Delta^2\Theta_i)$	4353665	4353665	4353665	4353665	4353665	4353665	4353665			$L(\Sigma'''S'''\Delta^2\Theta i)$	4353665	
$L(\mp\delta_i)$	3660372	0189338	3398718	0831174	1677779	4396918	0778511	$\delta_2+\delta_3+\delta_6+\delta_7$	$\delta_1+\delta_4+\delta_5$	$S\delta i$	$S'''\delta i$	
δ_i	-0,23229	0,11193	0,21037	-0,12110	-0,11716	0,02752	0,11963	0,19915	-0,30055	-0,00110	1,00000	

Comme on devait s'y attendre, les nombres compris dans le 16e tableau vérifient rigoureusement les deux conditions

$$S'''\Sigma\Delta^3\Theta_i = \Sigma S'''\Delta^3\Theta_i\,, \quad S''\Sigma''\Delta^3\Theta_i = \Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_i$$

et avec une exactitude suffisante celles qu'expriment les formules

$S\Delta^3\Theta_i = 0$, $\Sigma\Delta^3\Theta_i = 0$, $S''\Sigma\Delta^3\Theta_i = \Sigma S''\Delta^3\Theta_i$, $S\delta_i = 0$, $S'\delta_i = 0$, $S''\delta_i = 0$, $S'''\delta_i = 1$;

ce qui prouve la justesse de nos calculs.

XVII. TABLEAU.

Valeurs de ϑ_i''' et de $\Delta^4\Theta_i$ exprimées en millionièmes.

	Eau		Solution de potasse.	Huile de térében-thine.	Crownglass			Flintglass					Sommes.
	1. série.	2. série.			1.espèce.	2.espèce.	3.espèce.	1.espèce.	2.espèce.	3.espèce. 1. série.	3.espèce. 2. série.	4.espèce.	
$\dfrac{L(\pm S'''\Delta^3\Theta_i)}{L(-\delta_1)}$	2922561 3660372	0334238 3660372	1613529 3660372	6866363 3660372	9395193 3660372	6434527 3660372	9867717 3660372	8020893 3660372	1731863 3660372	3560259 3660372	0043214 3660372	6532125 3660372	
$L(\mp\vartheta_1''')$	6582933	3994610	5203901	0526735	3055565	0094899	3528089	1681265	5392235	7220631	3703586	0192497	
ϑ_1''' $\Delta^3\Theta_1$	-46 -58	-25 -29	-34 -10	113 82	-20 14	-10 -23	23 24	-117 -151	-35 -57	53 51	23 62	105 97	0 -0,000001
$\Delta^4\Theta_1$	-12	-4	24	-31	34	-13	1	-7	-22	-2	39	-8	-0,000001
$\dfrac{L(\pm S'''\Delta^3\Theta_i)}{L(\delta_2)}$	2922561 0189333	0334238 0489333	1613529 0189333	6866363 0489333	9395193 0489333	6434527 0489333	9867717 0489333	8020893 0489333	1731863 0489333	3560259 0489333	0043214 0189333	6532125 0489333	
$L(\pm\vartheta_2''')$	3411891	0823571	2132862	7355696	9884526	6923860	0357050	3510226	2221196	4049592	0532517	7021458	
ϑ_2''' $\Delta^3\Theta_2$	22 69	12 6	16 15	-51 -44	10 -23	5 -15	-11 -8	-71 40	17 61	-25 -15	-11 5	-50 -90	0,000002 0,000001
$\Delta^4\Theta_2$	47	-6	-1	10	-33	-20	3	-31	44	10	16	-40	-0,000001
$\dfrac{L(\pm S'''\Delta^3\Theta_i)}{L(\delta_3)}$	2922561 3808718	3331238 3808718	1613529 3808718	6866363 3808748	9395193 3808748	6131527 3808718	9867717 3808748	8020893 3808718	1731863 3808748	3560259 3808748	0043211 3808748	8532125 3808748	
$L(\pm\vartheta_3''')$	6731309	4142986	5452277	0675111	3203941	0243275	3676465	1829611	5540611	7369007	3851962	0340873	
ϑ_3''' $\Delta^3\Theta_3$	47 31	26 34	35 26	-117 -153	21 20	11 72	-23 -34	152 171	36 -29	-55 -48	-24 2	-108 -94	0,000001 0,000001
$\Delta^4\Theta_3$	-13	8	-9	-36	-1	61	-11	19	-65	7	26	11	0

$L(\pm S'''\Delta^3\Theta_i)$ $L(-\delta_4)$	2922561 0831171	0331238 0831171	1643529 0831171	6866363 0831171	9395193 0831171	6434527 0831171	9867717 0831171	8020893 0831171	1731863 0831171	3560259 0831171	0013214 0831171	6532125 0831171	
$L(\mp \vartheta_4''')$	3751035	1165712	2175003	7697837	0226667	7266001	0699191	8852367	2563337	4391733	0874688	7363599	
ϑ_4''' $\Delta^3\Theta_4$	-21 -45	-13 -12	-18 -30	59 117	-11 -12	-5 -35	12 18	-77 -56	-18 25	27 10	12 -67	51 87	-0,000002 0
$\Delta^4\Theta_4$	-21	1	12	58	-1	-30	6	21	43	-17	-79	33	0,000002
$L(\pm S'''\Delta^3\Theta_i)$ $L(-\delta_5)$	2922561 1677779	0331238 1677779	1643529 1677779	6866363 1677779	9395193 1677779	6434527 1677779	9867717 1677779	8020893 1677779	1731863 1677779	3560259 1677779	0013214 1677779	6532125 1677779	
$L(\mp \vartheta_5''')$	4600340	2012017	3321308	8511142	1072972	8112306	1515196	9698672	3109612	5238038	1720993	8209904	
ϑ_5''' $\Delta^3\Theta_5$	-29 6	-16 -14	-21 -33	72 46	-13 -46	-6 35	11 6	-93 -106	-22 -12	33 51	15 57	66 41	0 0,000001
$\Delta^4\Theta_5$	35	2	-12	-26	-33	11	-8	-13	-20	18	42	-25	0,000001
$L(\pm S'''\Delta^3\Theta_i)$ $L(\delta_6)$	2922561 4396948	0331238 4396948	1643529 4396948	6866363 4396948	9395193 4396948	6434527 4396948	9867717 4396948	8020893 4396948	1731863 4396948	3560259 4396948	0013214 4396948	6532125 4396948	
$L(\pm \vartheta_6''')$	7319509	4731186	6040177	1263341	3792141	0831175	1261665	2117811	6128811	8957207	1410162	0929073	
ϑ_6''' $\Delta^3\Theta_6$	5 6	3 -9	4 37	-13 -8	2 38	1 -73	-3 9	17 -8	1 47	-8 -14	-3 10	-12 -31	-0,000003 0,000001
$\Delta^4\Theta_6$	1	-12	33	5	36	-71	12	-25	43	-6	13	-22	0,000004
$L(\pm S''\Delta^3\Theta_i)$ $L(\delta_7)$	2922561 0778511	0331238 0778511	1643529 0778511	6866363 0778511	9395193 0778511	6434527 0778511	9867717 0778511	8020893 0778511	1731863 0778511	3560259 0778511	0013214 0778511	6532125 0778511	
$L(\pm \vartheta_7''')$	3701072	1112749	2422010	7641874	0173701	7213038	0616228	8799401	2510374	4338770	0821725	7310636	
ϑ_7''' $\Delta^3\Theta_7$	23 -10	13 22	17 -5	-58 -36	10 8	5 37	-12 -16	76 115	18 -4	-27 -38	-12 -66	-54 -7	-0,000001 0
$\Delta^4\Theta_7$	-33	9	-22	22	-2	32	-4	39	-22	-11	-54	17	0,000001

Dans le 17[e] tableau, les valeurs de

$$\vartheta_i''', \quad \Delta^5\Theta_i, \quad \Delta^6\Theta_i$$

sont exprimées en millionièmes. Ainsi, par exemple, de ce que, dans la onzième colonne verticale, la valeur de $\Delta^6\Theta_4$ se trouve représentée par -79, on doit conclurre que l'on a pour la 3[e] espèce de flintglass [2[e] Série]

$$\Delta^6\Theta_4 = -0{,}000079.$$

D'après le 17. tableau, la plus grande des valeurs numériques de $\Delta^6\Theta_i$, représentée par le nombre

0,000079

n'atteint même pas la moitié du nombre

0,000159

qui représente la plus grande des valeurs numériques des variations de Θ_i comprises dans la 7[e] ligne horizontale du 7[e] tableau. Donc les diverses valeurs de

$$\Delta^6\Theta_i$$

sont comparables aux erreurs d'observation, d'où il résulte que, dans l'application de nos formules aux expériences de Frauenhofer, on peut, sans erreur sensible, réduire le second membre de l'équation (1) ou (9) à ses quatre premiers termes, et la formule (42) à la formule (106). Il y a plus, d'après ce qui a été dit cidessus [page 87], les valeurs de $\Delta^5\Theta_i$ immédiatement déduites de l'expérience mériteront une confiance moindre que les valeurs de $\Delta^5\Theta_i$ tirées des équations (109) et représentées par

$$\vartheta_i''' = \Delta^5\Theta_i - \Delta^6\Theta_i$$

ou, en d'autres termes, celles que l'on tire des formules (111), en y remplaçant généralement $\Delta^6\Theta_i$ par zéro. Donc aussi les valeurs de Θ_i déduites de l'expérience et fournies par le 6[e] tableau mériteront moins de confiance que les valeurs corrigées de Θ_i qu'on tirerait des équations (113) en y remplaçant généralement $\Delta^6\Theta_i$ par zéro. D'ailleurs, comme, en vertu des formules (113), on aura

$$(132) \qquad \Theta_i = \vartheta_i + \vartheta_i' + \vartheta_i'' + \vartheta_i''' + \Delta^6\Theta_i,$$

les valeurs corrigées de Θ_i, ou celles qu'on obtiendra, en remplaçant, dans le second membre de l'équation (132), $\Delta^6\Theta i$ par zéro, seront évidemment les diverses valeurs du polynome

$$(133) \qquad \vartheta_i + \vartheta_i' + \vartheta_i'' + \vartheta_i''' = \Theta_i - \Delta^6\Theta_i.$$

Cela posé, on tirera sans peine des 11e, 13e, 15e et 17e tableaux le tableau suivant qui offre non seulement les valeurs de Θ_i immédiatement déduites de l'expérience, mais aussi les valeurs corrigées de Θ_i ou, en d'autres termes, les valeurs de

$$\Theta_i - \Delta^4\Theta_i,$$

et montre comment ces dernières valeurs se trouvent formées par l'addition des quantités

$$\vartheta_i, \ \vartheta_i', \ \vartheta_i'', \ \vartheta_i'''.$$

XVIII. TABLEAU.

Valeurs de Θ_i et de $\Theta_i - \Delta^4\Theta_i$

	Eau		Solution de potasse.	Huile de térébenthine.	Crownglass			Flintglass					Sommes.
	1. série.	2. série.			1.espèce.	2.espèce.	3.espèce.	1.espèce.	2.espèce.	3.espèce. 1. série.	3.espèce. 2. série.	4.espèce.	
ϑ_1 ϑ_1' ϑ_1'' ϑ_1'''	1,759113 12151 -121 -46	1,759100 12510 -81 -25	1,918321 10782 -132 -31	2,156676 5100 202 113	2,313162 10310 41 -20	2,318193 9962 32 -10	2,411135 6104 59 23	2,373692 -9106 106 -147	2,619919 -13973 92 -35	2,660368 -14715 38 53	2,660359 -14730 125 23	2,661791 -14961 -359 105	27,876834 1 2 0
$\Theta_1 - \Delta^4\Theta_1$ $\Delta^4\Theta_1$	1,771399 -12	1,771504 -4	1,958937 21	2,162391 -31	2,323193 31	2,328177 -13	2,117321 1	3,566515 -7	2,636003 -22	2,645711 -2	2,615777 39	2,619576 -8	27,876837 -1
Θ_1	1,771387	1,771500	1,958961	2,162360	2,323527	2,328161	2,417322	2,566538	2,633981	2,645712	2,615816	2,619568	27,876836
ϑ_2 ϑ_2' ϑ_2'' ϑ_2'''	1,762247 11188 -47 22	1,762232 11212 -31 12	1,951789 9689 -51 16	2,160515 4852 79 -54	2,317280 9265 16 10	2,322320 8952 12 5	2,115127 5185 23 -11	2,380277 -8183 41 71	2,634637 -12537 36 17	2,665104 -13250 15 -25	2,665095 -13237 49 -11	2,669538 -13417 -110 -50	27,926161 -1 2 2
$\Theta_2 - \Delta^4\Theta_2$ $\Delta^4\Theta_2$	1,773110 47	1,773155 -6	1,961413 -1	2,165392 10	2,326571 -33	2,331289 -20	2,120921 3	2,572206 -31	2,612133 41	2,651811 10	2,651896 16	2,653901 -10	27,926464 -1
Θ_2	1,773157	1,773119	1,961412	2,165102	2,326538	2,331269	2,120927	2,572177	2,612177	2,651851	2,651912	3,653861	27,926163
ϑ_3 ϑ_3' ϑ_3'' ϑ_3'''	1,770730 7602 63 47	1,770715 7638 42 26	1,961185 6383 68 35	2,170916 3297 -105 -117	2,328136 6293 -21 21	2,333199 6082 -16 11	2,127055 3726 -31 -23	2,392699 -5560 -55 152	2,667416 -8531 -18 36	2,677931 -9002 -19 -55	2,677925 -8993 -63 -21	2,682389 -9136 185 -108	28,060899 1 -2 1
$\Theta_3 - \Delta^4\Theta_3$ $\Delta^4\Theta_3$	1,778412 -13	1,778121 8	1,967871 -9	2,173991 -36	2,331731 -1	2,339576 61	2,430727 -11	2,587236 19	2,658873 -65	2,668858 7	2,668843 26	2,673330 11	28,060899 0
Θ_3	1,778129	1,778129	1,967862	2,173955	2,331730	2,339637	2,430716	2,587255	2,658808	2,668865	2,668869	2,673341	28,060899

ϑ_4	1,787146	1,781731	1,973986	2,181121	2,312921	2,318016	2,412153	2,608828	2,684010	2,694593	2,694584	2,699076	28,235465
ϑ_4'	2690	2703	2330	1167	2228	2152	1319	-1967	-3019	-3186	-3183	-3233	1
ϑ_4''	106	70	115	-177	-36	-28	-52	-93	-80	-33	-109	314	-3
ϑ_4'''	-24	-13	-18	59	-11	-5	12	-77	-18	27	12	54	-2
$\Theta_4 - \Delta^4\Theta_4$	1,784518	1,784491	1,975813	2,185170	2,345102	2,350135	2,413432	2,606691	2,680893	2,691401	2,691304	2,696211	28,235461
$\Delta^4\Theta_4$	-21	1	-12	58	-1	-30	6	21	43	-17	-79	33	2
Θ_4	1,784497	1,784492	1,975801	2,185528	2,345101	2,350105	2,413138	2,606712	2,680936	2,691381	2,691225	2,696244	28,235463
ϑ_5	1,791621	1,791606	1,984324	2,196529	2,355907	2,361030	2,455690	2,623288	2,698886	2,709529	2,70952$_0$	2,71103$_6$	28,391966
ϑ_5'	-1975	-1985	-1710	-857	-1636	-1580	-968	1115	2217	2339	233$_7$	237$_4$	1
ϑ_5''	105	70	114	-175	-35	-28	-51	-92	-80	-33	-10$_8$	31$_0$	-3
ϑ_5'''	-29	-16	-21	72	-13	-6	14	-93	-22	33	1$_5$	6$_6$	0
$\Theta_5 - \Delta^4\Theta_5$	1,789723	1,789675	1,982707	2,195569	2,351223	2,359416	2,451685	2,621548	2,701001	2,711868	2,711764	2,716786	28,391964
$\Delta^4\Theta_5$	35	2	-12	-26	-33	41	-8	-13	-20	18	42	-25	1
Θ_5	1,789757	1,789677	1,982695	2,195543	2,351190	2,359457	2,451677	2,621535	2,700981	2,711886	2,711806	2,716761	28,391965
ϑ_6	1,810560	1,810515	2,005299	2,219748	2,380811	2,385988	2,481648	2,651018	2,727416	2,738171	2,738162	2,742726	28,692092
ϑ_6'	-11507	-11561	-9965	-4991	-9529	-9206	-5611	8116	12914	13627	13613	13829	-1
ϑ_6''	9	6	10	-15	-3	-2	-4	-8	-7	-3	-9	26	0
ϑ_6'''	5	3	4	-13	2	1	-3	17	4	-8	-3	-12	-3
$\Theta_6 - \Delta^4\Theta_6$	1,799067	1,798993	1,995318	2,214729	2,371281	2,376781	2,476000	2,659443	2,710327	2,751787	2,751763	2,756569	28,692088
$\Delta^4\Theta_6$	1	-12	33	5	36	-71	12	-25	43	-6	13	-22	4
Θ_6	1,799068	1,798981	1,995381	2,214731	2,371317	2,376707	2,476012	2,659418	2,710370	2,751781	2,751776	2,756547	28,692092
ϑ_7	1,827387	1,827372	2,023936	2,240377	2,402937	2,408162	2,504712	2,675655	2,752763	2,763618	2,763609	2,768215	28,958713
ϑ_7'	-20150	-20517	-17709	-8869	-16934	-16362	-10025	14956	22951	24217	24193	24577	-2
ϑ_7''	-114	-75	-123	189	38	30	55	99	86	35	117	-336	1
ϑ_7'''	23	13	17	-58	10	5	-12	76	18	-27	-12	-54	-1
$\Theta_7 - \Delta^4\Theta_7$	1,806846	1,806763	2,006121	2,231639	2,386051	2,391835	2,494730	2,690786	2,775818	2,787843	2,787907	2,792102	28,958741
$\Delta^4\Theta_7$	-33	9	-22	22	-2	32	-4	39	-22	-11	-54	47	1
Θ_7	1,806813	1,806772	2,006099	2,231661	2,386019	2,391867	2,191726	2,690825	2,775796	2,787832	2,787853	3,792419	28,958742

Dans le 18e tableau, ainsi qu'on devait s'y attendre, les valeurs numériques des quatre quantités

(134) $$\vartheta_i,\quad \vartheta_i',\quad \vartheta_i'',\quad \vartheta_i'''$$

forment généralement une suite décroissante. Les seules substances pour lesquelles cette condition ne soit pas toujours remplie sont l'huile de térébenthine, la première espèce de flintglass, et la troisième espèce de flintglass (1re série). Encore, pour les substances dont il s'agit, les exceptions sont elles seulement relatives à la valeur numérique de ϑ_i''' que devient supérieure, pour certains rayons, à la valeur numérique de ϑ_i''.

Des calculs cidessus développés nous avons déduit cette conclusion importante que les différences du 4e ordre, représentées par $\Delta^4\Theta_i$, et déterminées par le moyen des formules (113) jointes aux formules (121), étaient, pour les diverses substances, des quantités comparables aux erreurs d'observation. Cette conclusion se trouve confirmée par la détermination des valeurs qu'on obtient pour $\Delta^4\Theta_i$, lorsque l'air est substitué au milieu réfringent. Alors en effet, chaque rayon cessant d'être réfracté, on a généralement

$$\Theta_i = 1,$$

et par suite les valeurs de $\Delta^4\Theta_i$, déduites des formules (113), (121), sont celles que présente le tableau suivant.

XIX. TABLEAU.

Valeurs de Θ_i, $\Delta\Theta_i$, $\Delta^2\Theta_i$, $\Delta^3\Theta_i$, $\Delta^4\Theta_i$, ϑ_i, ϑ_i', ϑ_i'', ϑ_i''' *relatives à l'air.*

	$i=1$	2	3	4	5	6	7	Somme	Sommes partielles			
Θ_i $\vartheta_i = 7a_i$	1 0,981336	1 0,986589	1 0,991339	1 0,997506	1 0,003035	1 1,013638	1 1,023058	7 7,000001	$\Delta\Theta_1+\Delta\Theta_2+\Delta\Theta_3+\Delta\Theta_4$	$\Delta\Theta_5+\Delta\Theta_6+\Delta\Theta_7$	$S'\Delta\Theta i$	$L(S'\Delta\Theta i)$
$\Delta\Theta_i$	0,015161	0,013111	0,008661	0,002191	-0,003035	-0,013638	-0,023058	-0,000001	0,039730	-0,039731	0,079461	9001540
$L(\pm\beta_i)$ $L(S'\Delta\Theta_i)$	2635636 9001540	2171394 9001540	0192730 9001540	5981691 9001540	1639336 9001540	2293216 9001540	4790578 9001540					
$L(\pm\vartheta_i')$	1637176	1172981	9191270	4983231	3641076	1294756	3792119					
ϑ_i' $\Delta\Theta_i$	0,014579 0,015161	0,013101 0,013111	0,008901 0,008661	0,003150 0,002191	-0,002313 -0,003035	-0,013477 -0,013638	-0,023945 -0,023058	0 -0,000001	$\Delta^2\Theta_3+\Delta^2\Theta_4+\Delta^2\Theta_5+\Delta^2\Theta_6$	$\Delta^2\Theta_1+\Delta^2\Theta_2+\Delta^2\Theta_7$	$S''\Delta^2\Theta i$	$L(S''\Delta^2\Theta i)$
$\Delta^2\Theta_i$	0,000585	0,000310	-0,000240	-0,000656	-0,000722	-0,000165	0,000887	-0,000001	0,001783	0,001782	-0,003565	5520595
$L(\mp\gamma_i)$ $L(-S''\Delta^2\Theta_i)$	3321150 5520595	9232438 5520595	0155557 5520595	2738973 5520595	2692177 5520595	1943579 5520595	3023763 5520595					
$L(\pm\vartheta_i'')$	8811723	4752933	5976152	8259568	8212772	7464174	8550360					
ϑ_i'' $\Delta^2\Theta_i$	0,000766 0,000585	0,000299 0,000310	-0,000396 -0,000240	-0,000670 -0,000656	-0,000563 -0,000722	-0,000056 -0,000165	0,000716 0,000887	-0,000001 -0,000001	$\Delta^3\Theta_2+\Delta^3\Theta_3+\Delta^3\Theta_6+\Delta^3\Theta_7$	$\Delta^3\Theta_1+\Delta^3\Theta_4+\Delta^3\Theta_5$	$S'''\Delta^3\Theta i$	$L(S'''\Delta^3\Theta i)$
$\Delta^3\Theta_i$	-0,000181	0,000011	0,000156	0,000014	-0,000059	-0,000109	0,000171	0,000003	0,000229	-0,000226	0,000455	6580114
$L(\mp\delta_i)$ $L(S'''\Delta^3\Theta_i)$	3660372 6580114	0489333 6580114	3808748 6580114	0831471 6580114	1677779 6580114	4396948 6580114	0778511 6580114					
$L(\mp\vartheta_i''')$	0240186	7069147	0388862	7411585	8257893	0977062	7358625					
ϑ_i''' $\Delta^3\Theta_i$	-0,000106 -0,000181	0,000051 0,000011	0,000109 0,000136	-0,000035 0,000014	-0,000067 -0,000059	0,000013 -0,000109	0,000054 0,000171	-0,000001 0,000003				
$\Delta^4\Theta_i$	-0,000075	-0,000040	0,000017	0,000060	0,000003	-0,000122	0,000117	0,000001				

Comme on devait s'y attendre, les nombres compris dans le 19e tableau vérifient avec une exactitude suffisante les conditions exprimées par les formules

$$S\Delta\Theta_i = 0, \quad S\Delta^2\Theta_i = 0, \quad S\Delta^3\Theta_i = 0, \quad S\Delta^4\Theta_i = 0$$

D'ailleurs, dans ce tableau comme dans les précédents, les valeurs de

$$S'\Delta\Theta_i, \quad S''\Delta\Theta_i, \quad S'''\Delta\Theta_i$$

sont respectivement

$$\begin{aligned} S'\Delta\Theta_i &= \Delta\Theta_1 + \Delta\Theta_2 + \Delta\Theta_3 + \Delta\Theta_4 - \Delta\Theta_5 - \Delta\Theta_6 - \Delta\Theta_7, \\ S''\Delta^2\Theta_i &= -\Delta^2\Theta_1 - \Delta^2\Theta_2 + \Delta^2\Theta_3 + \Delta^2\Theta_4 + \Delta^2\Theta_5 + \Delta^2\Theta_6 - \Delta^2\Theta_7, \\ S'''\Delta^3\Theta_i &= -\Delta^3\Theta_1 + \Delta^3\Theta_2 + \Delta^3\Theta_3 - \Delta^3\Theta_4 - \Delta^3\Theta_5 + \Delta^3\Theta_6 + \Delta^3\Theta_7. \end{aligned}$$

Dans le même tableau, la plus grande des valeurs numériques de $\Delta^4\Theta^i$, représentée par le nombre 0,000122 est inféreure au nombre 0,000159 qui représente la plus grande des valeurs numériques des variations de Θ_i comprises dans la 7e ligne horizontale du 7e tableau, et par consequent elle reste comparable aux erreurs d'observation.

Il est bon d'observer que les valeurs de

$$\Theta_i - \Delta^4\Theta_i$$

fournies par le 18e tableau, c'est à dire, en d'autres termes les valeurs de Θ_i calculées pour les substances aux quelles se rapportent les expériences de Frauenhofer, et corrigées d'après les principes cidessus exposés, représentent les diverses valeurs d'une même fonction linéaire des seules quantités

$$S\Theta_i, \quad S'\Theta_i, \quad S''\Theta_i, \quad S'''\Theta_i$$

que désormais nous désignerons, pour abréger, par

$$U, \quad U', \quad U'', \quad U'''.$$

Effectivement, si l'on pose

$$(135) \quad \left\{ \begin{aligned} U &= S\,\Theta_i = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 + \Theta_5 + \Theta_6 + \Theta_7, \\ U' &= S'\Theta_i = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 - \Theta_5 - \Theta_6 - \Theta_7, \\ U'' &= S''\Theta_i = -\Theta_1 - \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 + \Theta_5 + \Theta_6 - \Theta_7, \\ U''' &= S'''\Theta_i = -\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 - \Theta_4 - \Theta_5 + \Theta_6 + \Theta_7, \end{aligned} \right.$$

on tirera successivement des formules (113) et (121)

$$\begin{aligned} \vartheta_i &= U\alpha_i, \\ \Delta\Theta_i &= \Theta_i - \vartheta_i = \Theta_i - U\alpha_i, \\ S'\Delta\Theta_i &= S'(\Theta_i - U\alpha_i) = S'\Theta_i - US'\alpha_i = U' - US'\alpha_i, \end{aligned}$$

puis

$$\vartheta_i' = (U' - US'\alpha_i)\beta_i,$$
$$\Delta^2\Theta_i = \Delta\Theta_i - \vartheta_i' = \Theta_i - U\alpha_i - (U' - US'\alpha_i)\beta_i,$$
$$S''\Delta^2\Theta_i = S''\{\Theta_i - U\alpha_i - (U' - US'\alpha_i)\beta_i\} = S''\Theta_i - US''\alpha_i - U' - US'\alpha_i)S''\beta_i$$
$$= U'' - US''\alpha_i - (U' - US'\alpha_i)S''\beta_i,$$

puis encore

$$\vartheta_i'' = \{U'' - US''\alpha_i - (U' - US'\alpha_i)S''\beta_i\}\gamma_i,$$
$$\Delta^3\Theta_i = \Delta^2\Theta_i - \vartheta_i'' = \Theta_i - U\alpha_i - (U' - US'\alpha_i)\beta_i - \{U' - US''\alpha_i - (U' - US'\alpha_i)S''\beta_i\}\gamma_i$$
$$S'''\Delta^3\Theta_i = S'''\Theta_i - US'''\alpha_i - (U' - US'\alpha_i)S'''\beta_i - \{U'' - US''\alpha_i - (U' - US'\alpha^i)S''\beta_i\}S'''\gamma_i$$
$$= U''' - US'''\alpha_i - (U' - US'\alpha_i)S'''\beta_i - \{U'' - US''\alpha_i - (U' - US'\alpha_i)S''\beta_i\}S'''\gamma_i,$$

et enfin

$$\vartheta_i''' = \{U''' - US'''\alpha_i - (U' - US'\alpha_i)S'''\beta_i - [U'' - US''\alpha_i - (U' - US'\alpha_i)S''\beta_i]S'''\gamma_i\}\delta_i.$$

Or, en substituant les valeurs précédentes de

$$\vartheta_i, \quad \vartheta_i', \quad \vartheta_i'', \quad \vartheta_i'''$$

dans le premier membre de l'équation (133), on tirera de cette équation

$$(136) \quad \Theta_i - \Delta^4\Theta_i = U\alpha_i + (U' - US'\alpha_i)\beta_i + [U'' - US''\alpha_i - (U' - US'\alpha_i)S''\beta_i]\gamma_i$$
$$+ \{U''' - US'''\alpha_i - (U - US'\alpha_i)S'''\beta_i - [U'' - US''\alpha_i - (U' - US'\alpha_i)S''\beta_i]S'''\gamma_i\}\delta_i.$$

Telle est la formule qui sert à déterminer la valeur corrigée de Θ_i, ou, ce qui revient au même, la valeur de $\Theta_i - \Delta^4\Theta_i$, en fonction linéaire de

$$U, \quad U', \quad U'', \quad U'''$$

D'ailleurs on reconnaîtra sans peine que, si le second membre de la formule (136) est substitué à la place de $\Theta_i - \Delta_4\Theta_i$ dans les quatre quantités

$$S(\Theta_i - \Delta^4\Theta_i), \quad S'(\Theta_i - \Delta^4\Theta_i), \quad S''(\Theta_i - \Delta^4\Theta_i), \quad S'''(\Theta_i - \Delta^4\Theta_i),$$

ces quatre quantités, réduites à leur expression la plus simple à l'aide des équations (122), deviendront, comme on devait s'y attendre

$$U = S\Theta_i, \quad U' = S'\Theta_i, \quad U'' = S''\Theta_i, \quad U''' = S'''\Theta_i.$$

Dans la formule (136), les valeurs de

$$U, \quad U', \quad U'', \quad U'''$$

varient, tandisque l'on passe d'une substance à une autre; mais les valeurs de

$$S'\alpha_i, \quad S''\alpha_i, \quad S'''\alpha_i; \quad S''\beta_i, \quad S'''\beta_i; \quad S'''\gamma_i$$

aussi bien que celles de ε_i, β_i, γ_i, δ_i, sont indépendantes de la substance que l'on considère, et déterminées par les équations

(137)
$$
\begin{aligned}
S'\alpha_i &= \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4-\alpha_5-\alpha_6-\alpha_7,\\
S''\alpha_i &= -\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6-\alpha_7,\\
S'''\alpha_i &= -\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7,\\
S''\beta_i &= -\beta_1-\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5+\beta_6-\beta_7,\\
S'''\beta_i &= -\beta_1+\beta_2+\beta_3-\beta_4-\beta_5+\beta_6+\beta_7,\\
S'''\gamma_i &= -\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3-\gamma_4-\gamma_5+\gamma_6+\gamma_7.
\end{aligned}
$$

D'autre part les valeurs de

$$\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ \delta_i$$

tirées des 9[e], 12[e], 14[e] et 16[e] tableaux sont les suivantes.

XX. TABLEAU.

Valeurs de α_i, β_i, γ_i, δ_i.

i	1	2	3	4	5	6	7	Somme des valeurs numériques.
α_i	0,140691	0,140941	0,141620	0,142501	0,143291	0,144803	0,146151	1,000000
β_i	0,183469	0,164869	0,112014	0,039643	-0,029101	-0,169559	-0,301341	0,999999
γ_i	-0,21484	-0,08380	-0,11106	0,18789	0,18587	0,01564	-0,20090	1,000000
δ_i	-0,26228	-0,11193	0,21037	-0,12110	-0,14716	0,02753	0,11963	1,000000

Cela posé, on trouvera

(138)
$$
\begin{aligned}
S'\alpha_i &= 0{,}565753-0{,}434247 = 0{,}131506,\\
S''\alpha_i &= 0{,}572217-0{,}427783 = 0{,}144434,\\
S'''\alpha_i &= 0{,}573517-0{,}426483 = 0{,}147034,\\
S''\beta_i &= -0{,}547001+0{,}452998 = -0{,}094003,\\
S'''\beta_i &= -0{,}694012+0{,}305987 = -0{,}388025,\\
S'''\gamma_i &= -0{,}65846+0{,}34154 = -0{,}31692.
\end{aligned}
$$

Aux valeurs corrigées de Θ_i, fournies par le 19e tableau, ou, ce qui revient au même, par la formule (136), et représentées par

$$\Theta_i - \Delta^4\Theta_i$$

correspondront des valeurs corrigées de θ_i, que nous représenterons par

$$\theta_i - \Delta^4\theta_i,$$

et qui seront déterminées non plus par la formule (40), mais par l'équation

(139) $$\Theta_i - \Delta^4\Theta_i = (\theta_i - \Delta^4\theta_i)^2,$$

de laquelle on tire

(140) $$\theta_i - \Delta^4\theta_i = \sqrt{(\Theta_i - \Delta^4\Theta_i)} = \sqrt{(\theta_i^2 - \Delta^4\Theta_i)} = \theta_i - \frac{\Delta^4\Theta_i}{2\theta_i} - \frac{(\Delta^4\Theta_i)^2}{8\theta_i^3} - \text{etc...}$$

par conséquent

(141) $$\Delta^4\theta_i = \frac{\Delta^4\Theta_i}{2\theta_i} + \frac{(\Delta^4\Theta_i)^2}{8\theta_i^3} + \text{etc.} \ldots .$$

Lorsqu' à l'aide de la formule (140) on veut calculer la valeur de $\Delta^4\theta_i$ avec six décimales, on peut sans inconvenient réduire cette formule à

(142) $$\Delta^4\theta_i = \frac{\Delta^4\Theta_i}{2\theta_i}, \text{ ou } \Delta^4\theta_i = \tfrac{1}{2}\theta_i^{-1}\Delta^4\Theta_i.$$

En effet, comme des valeurs numériques de $\Delta^4\Theta_i$, fournies par le 17e tableau, la plus grande, savoir, 0,00079 reste inférieure au nombre 0,0001, et donne en conséquence pour valeur de

$$(\Delta^4\Theta_i)^2,$$

à plus forte raison, pour valeurs de

$$\frac{(\Delta^4\Theta_i)^2}{8} \quad \text{et} \quad \frac{(\Delta^4\Theta_i)^2}{8\theta_i^3}$$

[θ_i etant plus grand que l'unité], des nombres inférieurs à

0,00000001,

l'erreur produite dans le second membre de la formule (141) par l'omission du terme

$$\frac{(\Delta^4\Theta_i)^2}{8\theta_i^3}$$

ne s'élevera pas à un cent millionième. Il y a plus: on peut en dire autant de l'erreur produite par l'omission du terme dont il s'agit et de tous ceux qui le suivent. Car on tire de l'équation (140)

$$\Delta^{\prime}\theta_i = \theta_i - \sqrt{(\theta_i^2 - \Delta^{\prime}\Theta_i)} = \theta_i \left\{ 1 - \sqrt{\left(1 - \frac{\Delta^{\prime}\Theta_i}{\theta_i^2}\right)} \right\}$$
$$= \frac{\Delta^{\prime}\Theta_i}{\theta_i \left\{ 1 + \sqrt{\left(1 - \frac{\Delta^{\prime}\Theta_i}{\theta_i^2}\right)} \right\}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(143) \qquad \Delta^{\prime}\theta_i = \frac{\Delta^{\prime}\Theta_i}{2\theta_i} + \frac{\Delta^{\prime}\Theta_i}{2\theta_i} \left\{ \frac{2}{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{\Delta^{\prime}\Theta_i}{\theta_i^2}\right)}} - 1 \right\}.$$

Or, pour tirer la formule (142) de la formule (143), il suffira d'omettre dans cette dernière le terme

$$\frac{\Delta^{\prime}\Theta_i}{2\theta_i} \left\{ \frac{2}{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{\Delta^{\prime}\Theta_i}{\theta_i^2}\right)}} - 1 \right\}$$

évidemment inférieur au produit

$$\frac{\Delta^{\prime}\Theta_i}{2} \left\{ \frac{2}{1 + \sqrt{(1 - \Delta^{\prime}\Theta_i)}} - 1 \right\}$$

et, à plus forte raison, au produit

$$\frac{0,0001}{2} \left\{ \frac{2}{1 + \sqrt{(1 - 0,0001)}} - 1 \right\} = \frac{0,0001}{2} \left\{ \frac{2}{1,99995} - 1 \right\}$$
$$= \frac{0,0001}{2} \times \frac{0,00005}{1,99995} = \frac{0,000000005}{3,9999} < 0,00000001.$$

Si maintenant on substitue dans la formule (142) les valeurs de θ_i et de $\Delta^{\prime}\Theta_i$ que fournissent le 3[e] et le 17[e] tableau, alors, en effectuant le calcul par logarithmes, on obtiendra les valeurs de

$$\theta_i^{-1} \Delta^{\prime}\Theta_i$$

et de

$$\Delta^{\prime}\Theta_i$$

que renferme le tableau suivant.

XXI. TABLEAU.

Valeurs de $\theta_i^{-1}\Delta^4\Theta_i$ et de $\Delta^4\theta_i$, exprimées en millionièmes.

	Eau 1. série.	Eau 2. série.	Solution de potasse.	Huile de téréhenthine.	Crownglass 1.espèce.	Crownglass 2.espèce.	Crownglass 3.espèce.	Flintglass 1.espèce.	Flintglass 2.espèce.	Flintglass 3.espèce. 1. série.	Flintglass 3.espèce. 2. série.	Flintglass 4.espèce.
$L(\mp\Delta^4\Theta_1)$	0792	6021	3802	4914	5315	1139	0	8151	3424	3010	5911	9031
$L(\theta_1)$	1242	1242	1160	1675	1831	1835	1917	2047	2105	2113	2113	2116
Différence	9550	4779	2642	3239	3484	9304	8083	6104	1319	0897	3798	6915
$\theta_1^{-1}\Delta^4\Theta_1$	-9	-3	17	-21	22	-9	1	-4	-11	-1	24	-5
$\Delta^4\theta_1$	-4	-2	9	-11	11	-4	0	-2	-7	-1	12	-2
$L(\pm\Delta^4\Theta_2)$	6721	7782	0	0	5185	3010	4771	4914	6435	0	2042	6021
$L(\theta_2)$	1244	1244	1163	1678	1834	1838	1920	2052	2110	2118	2118	2121
Différence	5477	6538	8837	8322	3351	1172	2851	2862	4325	7882	9924	3900
$\theta_2^{-1}\Delta^4\Theta_2$	35	-5	-1	7	-22	-13	2	-19	27	6	10	-25
$\Delta^4\theta_2$	18	-2	0	3	-11	-7	1	-10	14	3	5	-12
$L(\mp\Delta^4\Theta_3)$	1139	9031	9542	5563	0	7853	0414	2782	8129	8451	4150	1461
$L(\theta_3)$	1250	1250	1470	1686	1841	1846	1929	2061	2123	2132	2132	2135
Différence	9889	7781	8072	3877	8159	6007	8485	0721	6006	6319	2018	9326
$\theta_3^{-1}\Delta^4\Theta_3$	-10	6	-6	-24	-1	10	-7	12	-10	4	16	9
$\Delta^4\theta_3$	-5	3	-3	-12	0	20	-4	6	-20	2	8	4
$L(\mp\Delta^4\Theta_4)$	3222	0	0792	7634	0	4771	7782	3222	6335	2301	8976	5185
$L(\theta_4)$	1258	1258	1179	1698	1851	1855	1910	2080	2111	2150	2150	2154
Différence	1964	8742	9613	5936	8149	2916	5872	1142	4191	0151	6826	3031
$\theta_4^{-1}\Delta^4\Theta_4$	-16	1	-9	39	-1	-20	4	13	26	-10	-48	20
$\Delta^4\theta_4$	-8	0	4	20	0	-10	2	7	13	-5	-24	10
$L(\mp\Delta^4\Theta_5)$	5111	3010	0792	4130	5185	6128	9031	1139	3010	2553	6232	3979
$L(\theta_5)$	1261	1264	1186	1708	1859	1864	1950	2093	2158	2166	2166	2170
Différence	1177	1746	9606	2422	3326	4264	7081	9011	0852	0387	4066	1809
$\theta_5^{-1}\Delta^4\Theta_5$	26	1	-9	-17	-22	27	-5	-8	-12	10	26	-15
$\Delta^4\theta_5$	13	1	-4	-9	-11	13	-3	-4	-6	5	13	-8
$L(\mp\Delta^4\Theta_6)$	0	0792	5185	6990	5563	8692	0792	3979	6335	7782	1139	3424
$L(\theta_6)$	1275	1275	1500	1727	1875	1880	1969	2124	2189	2198	2198	2202
Différence	8725	9517	3685	5263	3688	6812	8823	1855	4116	5584	8941	1222
$\theta_6^{-1}\Delta^4\Theta_6$	1	-9	23	3	23	-48	8	-15	26	-1	8	-13
$\Delta^4\theta_6$	0	-4	12	2	12	-24	4	-8	13	-2	4	-7
$L(\mp\Delta^4\Theta_7)$	5185	9542	3424	3424	3010	5051	6021	5911	3424	0414	7324	6721
$L(\theta_7)$	1285	1285	1512	1743	1888	1894	1985	2149	2217	2226	2226	2230
Différence	3900	8257	1912	1681	1122	3157	4036	3762	1207	8188	5098	4491
$\theta_7^{-1}\Delta^4\Theta_7$	-25	7	-16	15	-1	21	-3	24	-13	-7	-32	28
$\Delta^4\theta_7$	-12	3	-8	7	-1	10	-1	12	-7	-3	-16	14

L'exactitude des valeurs de $\Delta^4\Theta_i$ comprises dans le 21e tableau se trouve confirmée par les observations suivantes.

Les formules (117) donnent

$$(144)\quad \begin{cases} S\,\Delta^4\Theta_i = \Delta^4\Theta_1 + \Delta^4\Theta_2 + \Delta^4\Theta_3 + \Delta^4\Theta_4 + \Delta^4\Theta_5 + \Delta^4\Theta_6 + \Delta^4\Theta_7 = 0, \\ S'\,\Delta^4\Theta_i = \Delta^4\Theta_1 + \Delta^4\Theta_2 + \Delta^4\Theta_3 + \Delta^4\Theta_4 - \Delta^4\Theta_5 - \Delta^4\Theta_6 - \Delta^4\Theta_7 = 0, \\ S''\,\Delta^4\Theta_i = -\Delta^4\Theta_1 - \Delta^4\Theta_2 + \Delta^4\Theta_3 + \Delta^4\Theta_4 + \Delta^4\Theta_5 + \Delta^4\Theta_6 - \Delta^4\Theta_7 = 0, \\ S'''\Delta^4\Theta_i = -\Delta^4\Theta_1 + \Delta^4\Theta_2 + \Delta^4\Theta_3 - \Delta^4\Theta_4 - \Delta^4\Theta_5 + \Delta^4\Theta_6 + \Delta^4\Theta_7 = 0. \end{cases}$$

D'autre part, si l'on nomme ς la moyenne arithmétique entre les valeurs extrêmes de $\frac{1}{\theta_i}$, c'est-à-dire, entre $\frac{1}{\theta_1}$ et $\frac{1}{\theta_7}$, de sorte qu'on ait

$$(145)\qquad \varsigma = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_7}\right),$$

la différence entre $\frac{1}{\theta_i}$ et ς ne surpassera jamais

$$\frac{1}{\theta_1} - 1 = 1 - \frac{1}{\theta_7} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_7}\right);$$

par suite la différence entre

$$\Delta^4\Theta_i = \frac{1}{2\theta_i}\,\Delta^4\Theta_i$$

et le produit

$$\tfrac{1}{2}\,\varsigma\,\Delta^4\Theta_i$$

ne surpassera jamais la quantité

$$(146)\qquad \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_7}\right)\Delta^4\Theta_i.$$

Or la différence entre les valeurs de $\frac{1}{\theta_1}$ et $\frac{1}{\theta_7}$, calculées à l'aide du 3e tableau dans lequel on trouve leurs logarithmes, sera

pour l'eau	. . . .	0,7513 — 0,7440 = 0,0073,
pour la solution de potasse	. .	0,7145 — 0,7060 = 0,0085,
pour l'huile de térébenthine	. .	0,6800 — 0,6694 = 0,0106,
pour le crownglass 1re espèce.	.	0,6560 — 0,6474 = 0,0086,
„ 2e espèce.	.	0,6554 — 0,6466 = 0,0088,
„ 3e espèce.	.	0,6432 — 0,6331 = 0,0101,
pour le flintglass 1re espèce	. .	0,6242 — 0,6096 = 0,0146,
„ 2e espèce	. .	0,6159 — 0,6002 = 0.0157,
„ 3e espèce	. .	0,6148 — 0,5989 = 0,0159,
„ 4e espèce	. .	0,6143 — 0,5984 = 0,0159.

Donc le quart de cette différence sera, pour toutes les substances employées par Frauenhofer, inférieure à

$$\frac{0,0160}{4} = 0,004$$

à plus forte raison à 0,01; et comme, dans le 17ᵉ tableau, la plus grande des valeurs numériques de $\Delta^4\Theta_i$ est représentée par le nombre 0,000079, il est clair que le produit (146), c'est à dire, la différence entre $\Delta^4\Theta_i$ et le produit

$$\tfrac{1}{2}\varsigma\,\Delta^4\Theta_i$$

restera inférieure à un millionième. Donc les valeurs de $\Delta^4\theta_i$ et celles du produit $\frac{1}{2}\varsigma\,\Delta^4\Theta_i$, exprimées en millionièmes, seront représentées par les mêmes nombres, de sorte qu'en s'arrêtant à la 6ᵉ décimale on aura

(147) $$\Delta^4\theta_i = \tfrac{1}{2}\varsigma\,\Delta^4\Theta_i.$$

Cela posé, des formules (144) multipliées par $\frac{1}{2}\varsigma$ l'on tirera

(148) $$\left\{\begin{aligned} S\,\Delta^4\theta_i &= \Delta^4\theta_1 + \Delta^4\theta_2 + \Delta^4\theta_3 + \Delta^4\theta_4 + \Delta^4\theta_5 + \Delta^4\theta_6 + \Delta^4\theta_7 = 0,\\ S'\,\Delta^4\theta_i &= \Delta^4\theta_1 + \Delta^4\theta_2 + \Delta^4\theta_3 + \Delta^4\theta_4 - \Delta^4\theta_5 - \Delta^4\theta_6 - \Delta^4\theta_7 = 0,\\ S''\,\Delta^4\theta_i &= -\Delta^4\theta_1 - \Delta^4\theta_2 + \Delta^4\theta_3 + \Delta^4\theta_4 + \Delta^4\theta_5 + \Delta^4\theta_6 - \Delta^4\theta_7 = 0,\\ S'''\,\Delta^4\theta_i &= -\Delta^4\theta_1 + \Delta^4\theta_2 + \Delta^4\theta_3 - \Delta^4\theta_4 - \Delta^4\theta_5 + \Delta^4\theta_6 + \Delta^4\theta_7 = 0. \end{aligned}\right.$$

Or, si l'on combine successivement la premiere des équations (148) avec la seconde, puis avec la troisième, on en conclurra

$$\Delta^4\theta_1 + \Delta^4\theta_2 + \Delta^4\theta_3 + \Delta^4\theta_4 = 0, \qquad \Delta^4\theta_5 + \Delta^4\theta_6 + \Delta^4\theta_7 = 0,$$

puis

$$\Delta^4\theta_3 + \Delta^4\theta_4 + \Delta^4\theta_5 + \Delta^4\theta_6 = 0 \qquad \Delta^4\theta_1 + \Delta^4\theta_2 + \Delta^4\theta_7 = 0,$$

et par conséquent

(149) $$\Delta^4\theta_1 + \Delta^4\theta_2 = -(\Delta^4\theta_3 + \Delta^4\theta_4) = \Delta^4\theta_5 + \Delta^4\theta_6 = -\Delta^4\theta_7.$$

Donc les quatre quantités

(150) $$\Delta^4\theta_1 + \Delta^4\theta_2, \quad \Delta^4\theta_3 + \Delta^4\theta_4, \quad \Delta^4\theta_5 + \Delta^4\theta_6, \quad \Delta^4\theta_7$$

doivent être égales au signe près, et alternativement affectées de signes contraires. Pareillement de la première des équations (148) combinée avec les deux dernières on conclurra que les quatre quantités

(151) $$\Delta^4\theta_1, \quad \Delta^4\theta_2 + \Delta^4\theta_7, \quad \Delta^4\theta_3 + \Delta^4\theta_6, \quad \Delta^4\theta_4 + \Delta^4\theta_5$$

doivent être égales au signe près, et alternativement affectées de signes contraires. Ces conditions se trouvent effectivement remplies avec une exactitude suffisante pour les valeurs de $\Delta^4\Theta_i$ que fournit le 21ᵉ tableau, comme le prouve celui que nous allons tracer.

XXII. TABLEAU.

Valeurs de $\Delta^4\theta_i$, $\Delta^4\theta_1 + \Delta^4\theta_2$, etc. . . . . exprimées en millionièmes.

	Eau		Solution de	Huile de térében-	Crownglass			Flintglass				
	1. Série.	2. Série.	potasse.	thine.	1. espèce	2. espèce	3. espèce	1. espèce	2. espèce	3. espèce 1. Série.	3. espèce 2. Série.	4. espèce.
$\Delta^4\theta_1$	-4	-2	9	-11	11	-4	0	-2	-7	-1	12	-2
$\Delta^4\theta_2$	18	-2	0	3	-11	-7	1	-10	11	3	5	-12
$\Delta^4\theta_3$	-5	3	-3	-12	0	20	-4	6	-20	2	8	14
$\Delta^4\theta_4$	-8	0	-4	20	0	-10	2	7	13	-5	-21	10
$\Delta^4\theta_5$	13	1	-4	-9	-11	13	-3	-1	-6	5	13	-8
$\Delta^4\theta_6$	0	-4	12	2	12	-21	4	-8	13	-2	4	-7
$\Delta^4\theta_7$	-12	3	-8	7	-1	10	-1	12	-7	-3	-16	14
$\Delta^4\theta_1 + \Delta^4\theta_2$	14	-4	9	-8	0	-11	1	-12	7	2	17	-14
$\Delta^4\theta_3 + \Delta^4\theta_4$	-13	3	-7	8	0	10	-2	13	-7	-3	-16	14
$\Delta^4\theta_5 + \Delta^4\theta_6$	13	-3	8	-7	1	-11	1	-12	7	3	17	-15
$\Delta^4\theta_7$	-12	3	-8	7	-1	10	-1	12	-7	-3	-16	14
$\Delta^4\theta_1$	-4	-2	9	-11	11	-4	0	-2	-7	-1	12	-2
$\Delta^4\theta_2 + \Delta^4\theta_7$	6	1	-8	10	-12	3	0	2	7	0	-11	2
$\Delta^4\theta_3 + \Delta^4\theta_6$	-5	-1	9	-10	12	-4	0	-2	-7	0	12	-3
$\Delta^4\theta_4 + \Delta^4\theta_5$	5	1	-8	11	-11	3	-1	3	7	0	-11	2

Les résultats fournis par le 21e tableau peuvent encore être invoqués à l'appui des conclusions précédemment énoncées, suivant les quelles les valeurs de $\Delta^4\Theta_i$ et par suite celles de $\Delta^4\theta_i$ doivent être comparables aux erreurs d'observation. Effectivement, lorsqu'on passe de l'une à l'autre des deux séries d'expériences faites sur l'eau et la troisième espèce de flintglass, les valeurs de θ_i présentent les variations ci jointes:

XXIII. TABLEAU.

Variations de θi dans le passage d'une série d'expériences à une autre.

	$i = 1$	2	3	4	5	6	7
θ_i Eau 1. série	1,330935	1,331712	1,333577	1,335851	1,337818	1,341293	1,344177
θ_i Eau 2. série	1,330977	1,331709	1,333577	1,335849	1,337788	1,341261	1,344162
Variation de θ_i	0,000042	- 0,000003	0	- 0,000002	- 0,000030	- 0,000032	- 0,000015
θ_i Flintglass 3. espèce 1. série	1,626561	1,628151	1,633666	1,640514	1,646780	1,658849	1,669680
θ_i Flintglass 3. espèce 2. série	1,626596	1,628169	1,633667	1,640495	1,646756	1,658848	1,669686
Variation de θ_i	0,000032	0,000018	0,000001	-0,000019	-0,000024	-0,000001	0,00000

Ainsi les valeurs de θ_i fournies par les expériences de Frauenhofer admettent des erreurs comparables aux nombres

0,000042 ; 0,000049

renfermés dans les 4e et 7e lignes horizontales du 23e tableau. Or ces nombres surpassent évidemment les nombres

0,000020 et 0,000024

qui, dans les tableaux 21 et 22, répresentent les plus grandes valeurs numériques de $\Delta^4\Theta_i$.

Comme on l'a déjà remarqué, les valeurs de Θ_i déduites de l'observation méritent moins de confiance que les valeurs corrigées de Θ_i, représentées par

$$\Theta_i - \Delta^4\Theta_i.$$

Pareillement les valeurs de θ_i fournies par l'observation doivent mériter moins de confiance que les valeurs corrigées de θ_i, représentées par

$$\theta_i - \Delta^4\theta_i$$

et inscrites dans le tableau suivant.

XXIV. TABLEAU.

Valeurs de $\theta_i - \Delta^4\theta_i$.

	Eau		Solution de potasse.	Huile de térébenthine.	Crownglass			Flintglass				
	1. Série.	2. Série.			1. espèce	2. espèce	3. espèce	1. espèce	2. espèce	3. espèce 1. série.	3. espèce 2. série.	4. espèce
θ_1	1,330935	1,330977	1,399629	1,470496	1,524312	1,525832	1,554774	1,602042	1,623570	1,626561	1,626596	1,627749
$\Delta^4\theta_1$	-4	-2	9	-11	11	-4	0	-2	-7	-1	12	-2
$\theta_1 - \Delta^4\theta_1$	1,330939	1,330979	1,399620	1,470507	1,524301	1,525836	1,554774	1,602041	1,623577	1,626565	1,626584	1,627751
θ_2	1,331712	1,331709	1,400515	1,471530	1,525299	1,526849	1,555933	1,603800	1,625177	1,628451	1,628169	1,629681
$\Delta^4\theta_2$	18	-2	0	3	-11	-7	1	-10	14	3	5	-12
$\theta_2 - \Delta^4\theta_2$	1,331694	1,331711	1,400515	1,471527	1,525310	1,526856	1,555932	1,603810	1,625163	1,628148	1,628164	1,629693
θ_3	1,333577	1,333577	1,402805	1,474434	1,527982	1,529587	1,559075	1,608494	1,630585	1,633666	1,633667	1,635036
$\Delta^4\theta_3$	-5	3	-3	-12	0	20	-4	6	-20	2	8	4
$\theta_3 - \Delta^4\theta_3$	1,333582	1,333574	1,402808	1,474446	1,527982	1,529567	1,559079	1,608488	1,630605	1,633661	1,633659	1,635032
θ_4	1,335851	1,335849	1,405632	1,478353	1,531372	1,533005	1,563150	1,614532	1,637356	1,640544	1,640495	1,642024
$\Delta^4\theta_4$	-8	0	-4	20	0	-10	2	7	13	-5	-24	10
$\theta_4 - \Delta^4\theta_4$	1,335859	1,335849	1,405636	1,178333	1,531372	1,533015	1,563148	1,614525	1,637343	1,640519	1,610519	1,642014
θ_5	1,337818	1,337788	1,408082	1,181736	1,534337	1,536052	1,566741	1,620042	1,643166	1,646780	1,616756	1,648260
$\Delta^4\theta_5$	13	1	-4	-9	-11	13	-3	-4	-6	5	13	-8
$\theta_5 - \Delta^4\theta_5$	1,337805	1,337787	1,408086	1,181745	1,534348	1,536039	1,566744	1,620046	1,643172	1,646775	1,646743	1,648268
θ_6	1,341293	1,341261	1,412579	1,488198	1,539908	1,511657	1,573535	1,630772	1,655406	1,658849	1,658848	1,660285
$\Delta^4\theta_6$	0	-4	12	2	12	-24	4	-8	13	-2	4	-7
$\theta_6 - \Delta^4\theta_6$	1,311293	1,311265	1,412567	1,488196	1,539896	1,541681	1,573531	1,630780	1,655393	1,658851	1,658844	1,660292
θ_7	1,344177	1,344162	1,416368	1,493874	1,514684	1,546566	1,579170	1,610373	1,666072	1,669680	1,669686	1,671062
$\Delta^4\theta_7$	-12	3	-8	7	-1	10	-1	12	-7	-3	-16	14
$\theta_7 - \Delta^4\theta_7$	1,344189	4,344159	1,416376	1,493867	1,541685	1,546556	1,579171	1,610361	1,666079	1,669683	1,669702	1,671048

Les valeurs de $\Delta^4\Theta_i$ et de $\theta_i - \Delta^4\theta_i$ que renferme le 24e tableau peuvent être directement déduites de l'équation (142) ou (147) jointe à la formule (136). D'ailleurs, si l'on substitue aux valeurs de

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \Theta_3, \quad \Theta_4, \quad \Theta_5, \quad \Theta_6, \quad \Theta_7$$

que fournissent l'une des séries d'expériences faites sur l'eau ou la troisième espèce de flintglass les moyennes arithmétiques entre les valeurs déduites de la première et de la seconde série, les formules (135), (136) et même la formule (147) fourniront pour chacune des quantités

$$U, \quad U', \quad U'', \quad U''', \quad \Delta^4\Theta_i \quad \text{et} \quad \Delta^4\theta_i$$

non l'une des deux valeurs correspondantes aux deux séries d'expériences, mais une troisième valeur qui sera la moyenne arithmétique entre les deux premières. Il y a plus, le calcul n'étant point poussé au delà des millionièmes, l'équation (40) présentée sous la forme

(152) $$\theta_i = \mathrm{V}(\Theta_i)$$

donnera, dans la même hypothèse, pour chacune des quantités

$$\theta_1, \quad \theta_2, \quad \theta_3, \quad \theta_4, \quad \theta_5, \quad \theta_6, \quad \theta_7$$

une valeur égale à la moyenne arithmétique entre les valeurs fournies par les deux séries d'expériences faites sur l'eau ou la troisième espèce de flintglass. C'est du moins ce que l'on prouvera sans peine, en ayant égard à l'extrême petitesse des variations que subit Θ_i dans le passage de la première série d'expériences à la seconde.

De ce qu'on vient de dire il résulte que, pour chacune des quantités

$$\theta_i, \quad \Delta^4\theta_i \quad \text{et} \quad \theta_i - \Delta^4\theta_i,$$

les deux valeurs relatives à l'eau ou à la troisième espèce de flintglass, et inscrites dans deux colonnes verticales du 24e tableau, peuvent être remplacées par une troisième valeur qui sera la moyenne arithmétique entre les deux premières, et méritera évidemment plus de confiance. En opérant de cette manière, on réduira le 24e tableau à celui que nous allons tracer.

XXV. TABLEAU.

Valeurs de $\theta_i - \Delta^4\theta_i$.

	Eau	Solution de potasse.	Huile de térében-thine.	Crownglass 1. espèce.	Crownglass 2. espèce.	Crownglass 3. espèce.	Flintglass 1. espèce.	Flintglass 2. espèce.	Flintglass 3. espèce.	Flintglass 4. espèce.
θ_1	1,330956	1,399629	1,470496	1,524312	1,525832	1,554771	1,602042	1,623570	1,626580	1,627719
$\Delta^4\theta_1$	-3	9	-11	11	-4	0	-2	-7	5	-2
$\theta_1 - \Delta^4\theta_1$	1,330959	1,399620	1,470507	1,524301	1,525836	1,554771	1,602044	1,623577	1,626575	1,627751
θ_2	1,334711	1,400515	1,471530	1,525299	1,526849	1,555933	1,603800	1,625477	1,628460	1,629681
$\Delta^4\theta_2$	8	0	3	-11	-7	-1	-10	11	4	-12
$\theta_2 - \Delta^4\theta_2$	1,334703	1,400515	1,471527	1,525310	1,526856	1,555932	1,603810	1,625463	1,628456	1,629693
θ_3	1,333577	1,402805	1,474431	1,527982	1,529587	1,559075	1,608494	1,630585	1,636667	1,635036
$\Delta^4\theta_3$	-1	-3	-12	0	20	-4	6	-20	5	4
$\theta_3 - \Delta^4\theta_3$	1,333578	1,402808	1,474443	1,527982	1,529567	1,559079	1,608488	1,630605	1,636662	1,635032
θ_4	1,335850	1,405632	1,478353	1,531372	1,533005	1,563150	1,644532	1,637356	1,640520	1,642024
$\Delta^4\theta_4$	-4	-4	20	0	-10	2	7	13	-11	10
$\theta_4 - \Delta^4\theta_4$	1,335854	1,405636	1,478333	1,531372	1,533015	1,563148	1,644525	1,637343	1,640531	1,642014
θ_5	1,337803	1,408032	1,481736	1,534337	1,536052	1,566744	1,620012	1,643166	1,646768	1,648260
$\Delta^4\theta_5$	7	-4	-9	-11	13	-3	-1	-6	9	-8
$\theta_5 - \Delta^4\theta_5$	1,337796	1,408036	1,481745	1,534348	1,536039	1,566744	1,620016	1,643172	1,646759	1,648268
θ_6	1,341277	1,412579	1,488198	1,539908	1,541657	1,573535	1,630772	1,655406	1,658819	1,660285
$\Delta^4\theta_6$	-2	12	2	12	-21	4	-8	13	1	-7
$\theta_6 - \Delta^4\theta_6$	1,341279	1,412567	1,488196	1,539896	1,541681	1,573531	1,630780	1,655393	1,658818	1,660292
θ_7	1,344170	1,416368	1,493874	1,544684	1,546566	1,579470	1,640373	1,666072	1,669683	1,671062
$\Delta^4\theta_7$	-4	-8	7	-1	10	-1	12	-7	-9	11
$\theta_7 - \Delta^4\theta_7$	1,344174	1,416376	1,493867	1,544685	1,546556	1,579471	1,640361	1,666079	1,669692	1,671018

§. 7. *Suite des applications numériques.*

La valeur corrigée de Θ_i, qui dans le 6e paragraphe se trouve représentée par

$$\Theta_i - \Delta^4\Theta_i$$

et déterminée en fonction de U, U', U'', U''' par la formule (136), ne vérifie qu'approximativement la condition de se réduire à l'unité, quand on remplace l'un des milieux réfringents par l'air [voyez le 19e tableau], ce qui revient à supposer

$$U = 7, \quad U' = 1, \quad U'' = 1, \quad U''' = 1.$$

Mais on pourrait modifier nos formules, de manière que cette même condition se trouvât rigoureusement remplie. Pour y parvenir il suffira de considérer la quantité Θ, que détermine [dans le §. 6] l'équation (123), comme représentant la première valeur approchée de chacune des quantités

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \Theta_3, \quad \Theta_4, \quad \Theta_5, \quad \Theta_6, \quad \Theta_7,$$

et de substituer en conséquence aux équations (113), (114) les formules suivantes

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta_1 = \Theta + \Delta\Theta_1, \quad \Theta_2 = \Theta + \Delta\Theta_2, \text{ etc.} \ldots \quad \Theta_7 = \Theta + \Delta\Theta_7, \\ \Delta\Theta_1 = \vartheta_1' + \Delta^2\Theta_1, \quad \Delta\Theta_2 = \vartheta_2' + \Delta^2\Theta_2, \text{ etc.} \ldots \quad \Delta\Theta_7 = \vartheta_7' + \Delta^2\Theta_7, \\ \Delta^2\Theta_1 = \vartheta_1'' + \Delta^3\Theta_1, \quad \Delta^2\Theta_2 = \vartheta_2'' + \Delta^3\Theta_2, \text{ etc.} \ldots \quad \Delta^2\Theta_7 = \vartheta_7' + \Delta^3\Theta_7, \\ \Delta^3\Theta_1 = \vartheta_1''' + \Delta^4\Theta_1, \quad \Delta^3\Theta_2 = \vartheta_2''' + \Delta^4\Theta_2, \text{ etc.} \ldots \quad \Delta^3\Theta_7 = \vartheta_7''' + \Delta^4\Theta_7, \\ \text{etc.} \ldots\ldots \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta = \tfrac{1}{7} S\Theta_i, = \dfrac{\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 + \Theta_5 + \Theta_6 + \Theta_7}{7}, \\ \vartheta_1' = \dfrac{\Sigma'\Delta\Theta_1}{\Sigma' S'\Delta\Theta_i} S'\Delta\Theta_i, \quad \vartheta_2' = \dfrac{\Sigma'\Delta\Theta_2}{\Sigma' S'\Delta\Theta_i} S'\Delta\Theta_i, \text{ etc.} \ldots \quad \vartheta_7' = \dfrac{\Sigma'\Delta\Theta_7}{\Sigma' S'\Delta\Theta_i} S'\Delta\Theta_i, \\ \vartheta_1'' = \dfrac{\Sigma''\Delta^2\Theta_1}{\Sigma'' S''\Delta^2\Theta_i} S''\Delta^2\Theta_i, \quad \vartheta_2'' = \dfrac{\Sigma''\Delta^2\Theta_2}{\Sigma' S''\Delta^2\Theta_i} S''\Delta^2\Theta_i, \text{ etc.} \ldots \quad \vartheta_7'' = \dfrac{\Sigma'\Delta^2\Theta_7}{\Sigma'' S''\Delta^2\Theta_i} S''\Delta^2\Theta_i, \\ \vartheta_1''' = \dfrac{\Sigma'''\Delta^3\Theta_1}{\Sigma''' S'\Delta^3\Theta i} S'''\Delta^3\Theta_i, \quad \vartheta_2''' = \dfrac{\Sigma'''\Delta^3\Theta_2}{\Sigma''' S'''\Delta^3\Theta_i} S'''\Delta^3\Theta_i, \text{ etc.} \ldots \quad \vartheta_7''' = \dfrac{\Sigma'''\Delta^3\Theta_7}{\Sigma''' S'''\Delta^3\Theta_i} S'''\Delta^3\Theta_i, \\ \text{etc.} \ldots\ldots \end{array} \right.$$

dans lesquelles on désigne par

$$S\Theta_i, \quad S'\Delta\Theta_i, \quad S''\Delta^2\Theta_i, \quad S'''\Delta^3\Theta_i, \text{ etc.} \ldots.$$

les sommes des valeurs de

$$\Theta_i, \quad \Delta\Theta_i, \quad \Delta^2\Theta_i, \quad \Delta^3\Theta_i, \text{ etc.} \ldots.$$

relatives aux divers rayons, mais prises tantôt, avec le signe $+$, tantôt avec le signe $-$, de manière que les valeurs numériques de ces sommes se reduisent, du moins pour certaines substances, aux sommes des valeurs numériques, et par

$$\Sigma' S' \Delta\Theta_i, \quad \Sigma'' S'' \Delta^2\Theta_i, \quad \Sigma''' S''' \Delta^3\Theta_i, \text{ etc.} \ldots$$

les sommes des valeurs numériques de

$$S'\Delta\Theta_i, \quad S''\Delta^2\Theta_i, \quad S'''\Delta^3\Theta_i, \quad \text{etc.} \ldots$$

relatives aux diverses substances. Effectivement, si l'on remplace le milieu réfringent par l'air, ce qui revient a poser généralement

$$\Theta_i = 1,$$

on tirera des formules (1) et (2), 1°.

$$\Theta = 1 \quad \text{et par suite} \quad \Delta\Theta_i = 0, \quad \text{quel que soit } i,$$

donc aussi $S'\Delta\Theta_i = 0$; 2°.

$$\vartheta_i' = 0 \quad \text{et par suite} \quad \Delta^2\Theta_i = 0, \quad \text{quel que soit } i$$

donc aussi $S''\Delta^2\Theta_i = 0$; 3°.

$$\vartheta_i'' = 0 \quad \text{et par suite} \quad \Delta^3\Theta_i = 0, \quad \text{quel que soit } i$$

donc aussi $S'''\Delta^3\Theta_i = 0$; 4°.

$$\vartheta_i''' = 0, \quad \text{et par suite} \quad \Delta^4\Theta_i = 0, \quad \text{quel que soit } i$$

etc. . . . . Donc en définitive les formules (1) et (2) donneront, quand on substituera l'air au milieu réfringent,

$$\Delta\Theta_i = 0, \quad \Delta^2\Theta_i = 0, \quad \Delta^3\Theta_i = 0, \quad \Delta^4\Theta_i = 0, \text{ etc.}$$

et par conséquent

$$\Theta_i - \Delta\Theta_i = \Theta_i - \Delta^2\Theta_i = \Theta_i - \Delta^3\Theta_i = \Theta_i - \Delta^4\Theta_i = \ldots = 1.$$

D'ailleurs les formules (1) diffèrent des formules (113) du §. 6 en un seul point, savoir, que les valeurs de $\Delta\Theta_i$ s'y trouvent déterminées non plus par des équations de la forme

$$\Theta_i = \vartheta_i + \Delta\Theta_i, \quad \text{ou} \quad \Delta\Theta_i = \Theta_i - \vartheta_i$$

mais par des équations de la forme

$$\Theta_i = \Theta + \Delta\Theta_i, \quad \text{ou} \quad \Delta\Theta_i = \Theta_i - \Theta.$$

Du reste les nouvelles valeurs de $\Delta\Theta_i$, comme les premières, s'évanouiraient si l'on pouvait réduire la formule (42) du §. 6 à la formule (56) du même paragraphe, puisqu'on aurait alors

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = \Theta_4 = \Theta_5 = \Theta_6 = \Theta_7 = \Theta.$$

Donc les nouvelles valeurs de $\Delta\Theta_i$, comme les premières, seront des quantités du même ordre que b_2. Elles satisferont aussi, comme elles, à l'équation

$$K_1\Delta\Theta_1 + K_2\Delta\Theta_2 + \text{etc.} \ldots\ldots + K_n\Delta\Theta_n = 0,$$

que l'on déduira immédiatement des équations (41) et (42) du §. 6 jointes aux formules

$$\Theta_1 = \Theta + \Delta\Theta_1, \quad \Theta_2 = \Theta + \Delta\Theta_2, \ \ldots \ \Theta_n = \Theta + \Delta\Theta_n;$$

et c'est à l'aide des mêmes règles que, dans les formules (113) [§. 6] et (1) [§. 7], on déduira successivement les valeurs de $\Delta^2\Theta_i$, $\Delta^3\Theta_i$, $\Delta^4\Theta_i$, etc. .... des valeurs déjà calculées de $\Delta\Theta_i$. Enfin les formules (1) et (2), aussi bien que les formules (113) et (114) du § 6, entraîneront les conditions (116), (117), (118), (119), du § 6 à l'exception de la première des conditions (116) et de celles de conditions (118), (119) qui renferment le signe Σ. Cela posé, en raisonnant toujours de la même manière, on prouvera que les formules (1), comme les formules (113) [§. 6], fournissent 1°. des valeurs de

$$\Delta\Theta_i, \quad \Delta^2\Theta_i, \quad \Delta^3\Theta_i, \quad \Delta^4\Theta_i, \ldots.$$

respectivement comparables aux coefficients

$$b_2, \quad b_3, \quad b_4, \quad b_5, \ldots.$$

par conséquent des valeurs de $\Delta^4\Theta_i$ comparables aux erreurs d'observation, puisqu'on a vu qu'on peut sans erreur sensible supposer $b_5 = 0$; 2° des valeurs de

$$\Theta_i - \Delta^4\Theta_i$$

ou valeurs corrigées de Θ_i, qui pourront être substituées aux valeurs de Θ_i directement tirées des expériences, et mériteront même plus de confiance que ces dernières.

Si l'on fait pour abrégér

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \beta_1 = \dfrac{\Sigma'\Delta\Theta_1}{\Sigma S'\Delta\Theta_i}, \quad \beta_2 = \dfrac{\Sigma'\Delta\Theta_2}{\Sigma S'\Delta\Theta_i}, \text{ etc.} \ldots \ \beta_7 = \dfrac{\Sigma'\Delta\Theta_7}{\Sigma S'\Delta\Theta_i}, \\ \gamma_1 = \dfrac{\Sigma''\Delta^2\Theta_1}{\Sigma''S'\Delta^2\Theta_i}, \quad \gamma_2 = \dfrac{\Sigma''\Delta^2\Theta_2}{\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i}, \text{ etc.} \ldots \ \gamma_7 = \dfrac{\Sigma''\Delta^2\Theta_7}{\Sigma''S'\Delta^2\Theta_i}, \\ \delta_1 = \dfrac{\Sigma'''\Delta^3\Theta_1}{\Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_i}, \quad \delta_2 = \dfrac{\Sigma'''\Delta^3\Theta_2}{\Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_i}, \text{ etc.} \ldots \ \delta_7 = \dfrac{\Sigma'''\Delta^3\Theta_7}{\Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_i}, \\ \text{etc.} \ldots\ldots \end{array}\right.$$

les formules (2) donneront

$$(4)\quad \begin{cases} \vartheta_1' = \beta_1 S' \Delta\Theta_i, & \vartheta_2' = \beta_2 S' \Delta\Theta_i, \text{ etc.} \ldots\ldots \quad \vartheta_7' = \beta_7 S' \Delta\Theta_i, \\ \vartheta_1'' = \gamma_1 S'' \Delta^2\Theta_i, & \vartheta_2'' = \gamma_2 S'' \Delta^2\Theta_i, \text{ etc.} \ldots\ldots \quad \vartheta_7'' = \gamma_7 S'' \Delta^2\Theta_i, \\ \vartheta_1''' = \delta_1 S''' \Delta^3\Theta_i, & \vartheta_2''' = \delta_2 S''' \Delta^3\Theta_i, \text{ etc.} \ldots\ldots \quad \vartheta_7''' = \delta_7 S''' \Delta^3\Theta_i, \\ \text{etc.} \ldots\ldots & \end{cases}$$

et l'on tirera des équations (3) jointes aux équations (117) [§. 6]

$$(5)\quad \begin{cases} S\beta_i = 0, \quad S'\beta_i = 1, \\ S\gamma_i = 0, \quad S'\gamma_i = 0, \quad S''\gamma_i = 1, \\ S\delta_i = 0, \quad S'\delta_i = 0, \quad S''\delta_i = 0, \quad S'''\delta_i = 1, \\ \text{etc.} \ldots \end{cases}$$

Si maintenant on applique aux expériences de Frauenhofer les formules (1), (3) et (4), alors, en partant des valeurs de Θ données par le 8e tableau du §. 6, on reconnaîtra que les sommes désignées par

$$S'\Theta_i, \quad S''\Theta_i, \quad S'''\Theta_i,$$

peuvent rester composées comme l'indiquent les équations (49) du même paragraphe; et, en posant en conséquence

$$(6)\quad \begin{cases} S'\Theta_i = \quad \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 - \Theta_5 - \Theta_6 - \Theta_7, \\ S''\Theta_i = -\Theta_1 - \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 + \Theta_5 + \Theta_6 - \Theta_7, \\ S'''\Theta_i = -\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 - \Theta_4 - \Theta_5 + \Theta_6 + \Theta_7, \\ \text{etc.} \ldots\ldots \end{cases}$$

on obtiendra successivement les valeurs de

$$\Delta\Theta_i, \quad \beta_i, \quad \vartheta_i', \quad \Delta^2\Theta_i, \quad \gamma_i, \quad \vartheta_i'', \quad \Delta^3\Theta_i, \quad \delta_i, \quad \vartheta_i''', \quad \Delta^4\Theta_i$$

que fournissent les tableaux suivants.

I. TABLEAU.

Valeurs de $\varDelta\Theta_i$.

	Eau		Solution de potasse.	Huile de térében-thine.	Crownglass			Flintglass					Sommes.
	1. série.	2. série.			1. espèce.	2. espèce.	3. espèce.	1. espèce.	2. espèce.	3. espèce. 1. série.	3. espèce. 2. série.	4. espèce.	
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,348779	2,353887	2,448260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	28,306066
Θ_1	1,771387	1,771500	1,958961	2,162360	2,323527	2,328164	1,417322	2,566358	2,635981	2,645712	2,645816	2,649568	27,876836
$\varDelta\Theta_1$	-0,014814	-0,014686	-0,019359	-0,027523	-0,025252	-0,025723	-0,030938	-0,048813	-0,054740	-0,055619	-0,055506	-0,056257	-0,429230
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,348779	2,353887	2,448260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	28,306066
Θ_2	1,773457	1,773416	1,961442	2,165402	2,326538	2,331269	2,420927	2,572175	2,642177	2,651854	2,651912	2,655861	27,926461
$\varDelta\Theta_2$	-0,012744	-0,01273	-0,016878	-0,024481	-0,022241	-0,022618	-0,027333	-0,043176	-0,048544	-0,049477	-0,049410	-0,049964	-0,379605
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,348779	2,353887	2,448260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	28,306066
Θ_3	1,778429	1,778429	1,967862	2,173955	2,334730	2,339637	2,430716	2,587255	2,658808	2,668865	2,668869	2,673341	28,060899
$\varDelta\Theta_3$	-0,007772	-0,007757	-0,010458	-0,015928	-0,014049	-0,014250	-0,017544	-0,028096	-0,031913	-0,032466	-0,032453	-0,032484	-0,245167
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,348779	2,353887	2,448260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	28,306066
Θ_4	1,784497	1,784492	1,975801	2,185528	2,345101	2,350105	2,443438	2,606712	2,680936	2,691384	2,691225	2,696241	28,235463
$\varDelta\Theta_4$	-0,001704	-0,001694	-0,002519	-0,004355	-0,003678	-0,003782	-0,004822	-0,008639	-0,009785	-0,009947	-0,010097	-0,009584	-0,070603
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,348779	2,353887	2,448260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	28,306066
Θ_5	1,789757	1,789677	1,982695	2,195543	2,354190	2,359457	2,454677	2,624535	2,700981	2,711886	2,711806	2,716761	28,391965
$\varDelta\Theta_5$	0,003556	0,003491	0,004375	0,005660	0,005411	0,005570	0,006417	0,009184	0,010260	0,010555	0,010484	0,010936	0,085899
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,348779	2,353887	2,448260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	28,306066
Θ_6	1,799068	1,798981	1,995381	2,214734	2,371317	2,376707	2,476012	2,659418	2,740370	2,751781	2,751776	2,756547	28,692092
$\varDelta\Theta_6$	0,012867	0,012795	0,017061	0,024851	0,022538	-0,022820	0,027752	0,044067	0,049649	0,050450	0,050454	0,050722	0,386026
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,348779	2,353887	2,448260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	28,306066
Θ_7	1,806813	1,806772	2,006099	2,231661	2,386046	2,391867	2,494726	2,690825	2,775796	2,787832	2,787853	2,792449	28,958742
$\varDelta\Theta_7$	0,020612	0,020586	0,027779	0,041778	0,037270	0,037980	0,046466	0,075474	0,085075	0,086501	0,086531	0,086624	0,652676

Les nombres compris dans la dernière colonne verticale de ce tableau servent à prouver la justesse de nos calculs. Car ces nombres, qui représentent les diverses valeurs des trois sommes

$$\Sigma\Theta, \quad \Sigma\Theta_i, \quad \Sigma\varDelta\Theta_i$$

dont chacune se compose uniquement de termes positifs, vérifient les formules

$$\Sigma\Theta_1 = \Sigma\Theta + \Sigma\varDelta\Theta_1, \quad \Sigma\Theta_2 = \Sigma\Theta + \Sigma\varDelta\Theta_2, \ldots \quad \Sigma\Theta_7 = \Sigma\Theta + \Sigma\varDelta\Theta_7$$

que l'on déduit immédiatement des premières des équations (153)

II. TABLEAU.

Valeurs de β_i.

	$\Delta\Theta_1$	$\Delta\Theta_2$	$\Delta\Theta_3$	$\Delta\Theta_4$	$\Delta\Theta_5$	$\Delta\Theta_6$	$\Delta\Theta_7$	$\Delta\Theta_1+\Delta\Theta_2+\Delta\Theta_3+\Delta\Theta_4$	$\Delta\Theta_5+\Delta\Theta_6+\Delta\Theta_7$	$S\Delta\Theta_i$	$S'\Delta\Theta_i$	$L(-S'\Delta\Theta_i)$
Eau, 1re série	-0,014811	-0,012744	-0,007772	-0,001704	0,003556	0,012867	0,020612	-0,037031	0,037035	0,000001	-0,074069	8696365
Eau, 2e série	-0,014686	-0,012737	0,007757	-0,001691	0,003491	0,012795	0,020586	-0,036874	0,036782	-0,000002	-0,073746	8677385
Solution de potasse	-0,019339	-0,016878	-0,010158	-0,002519	0,004375	0,017061	0,027779	-0,049214	0,049215	0,000001	-0,098429	9931281
Huile de térébenthine	-0,027523	-0,024181	-0,015928	-0,004355	0,005660	0,024851	0,041778	-0,072287	0,072289	0,000002	-0,144576	1600963
Crownglass, 1re espèce	-9,025232	-0,022241	-0,011019	-0,003678	0,005111	0,022538	0,037270	-0,065220	0,065219	-0,000001	-0,130439	1151076
Crownglass, 2e espèce	-0,025723	-0,022618	-0,014250	-0,003782	0,005570	0,022820	0,037980	-0,066373	0,066370	-0,000003	-0,132743	1230116
Crownglass, 3e espèce	-0,030938	-0,027333	-0,017541	-0,004822	0,006117	0,027752	0,046466	-0,080637	0,080635	-0,000002	-0,161272	2075390
Flintglass, 1re espèce	-0,048813	-0,043176	-0,028096	-0,008639	0,009181	0,044067	0,075471	-0,128724	0,128725	0,000001	-0,257449	4106912
Flintglass, 2e espèce	-0,051740	-0,048544	-0,031913	-0,009785	0,010260	0,049649	0,085075	-0,144982	0,144984	0,000002	-0,289966	4623171
Flintglass, 3e espèce, 1re série	-0,055619	-0,049477	-0,032466	-0,009947	0,010555	0,050150	0,086501	-0,147509	0,147506	-0,000003	-0,295015	4698141
Flintglass, 3e espèce, 2e série	-0,055506	-0,049140	-0,032153	-0,010097	0,010184	0,050151	0,086531	-0,147466	0,147169	0,000003	-0,294935	4697264
Flintglass, 4e espèce	-0,056257	-0,049964	-0,032481	-0,009581	0,010936	0,050722	0,086624	-0,148283	0,148282	-0,000001	-0,296565	4721200
Sommes ou $\Sigma\Delta\Theta_i$	0,429230	0,579603	0,245167	0,070603	-0,085839	-0,386026	-0,652676			$\Sigma S'\Delta\Theta_i$	2,249204	
	6326901	5793262 34	3894196 125	8488232	9339881	5866098 68	8146937 40				3520281 8	
$L(\pm\Sigma'\Delta\Theta i)$	6326901	5793296	3894621	8488232	9339881	5866166	8146977			$L(\Sigma S'\Delta\Theta_i)$	3520289	
$L(\Sigma S'\Delta\Theta i)$	3520289	3520289	3520289	3520289	3520289	3520289	3520289					
$L(\pm\beta_i)$	2806612 6167 145	2273007 2953 54	0374332 4265 67	4967943	5819592	2315877 5679 198	4626688 6675 13	$\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4$	$\beta_5+\beta_6+\beta_7$	$S\beta i$	$S'\beta i$	
βi	0,190836	0,163772	0,109002	0,031390	-0,038191	-0,171628	-0,290181	0,500000	-0,500000	0	1	

Comme on devait s'y attendre, les nombres compris dans ce tableau vérifient rigoureusement la condition

$$S\Sigma'\Delta\Theta_i = \Sigma S'\Delta\Theta_i,$$

et, avec une exactitude suffisante, celles que comprend la formule

$$S\Delta\Theta_i = 0.$$

Il y a plus, ils vérifient en toute rigueur les deux premières des conditions (157), savoir,

$$S\beta_i = 0, \quad S'\beta_i = 1.$$

III. TABLEAU.

Valeurs de ϑ_i' et de $\Delta^2\Theta_i$ exprimées en millionièmes.

	Eau 1. série.	Eau 2. série.	Solution de potasse.	Huile de térébenthine.	Crownglass 1. espèce	Crownglass 2. espèce	Crownglass 3. espèce	Flintglass 1. espèce	Flintglass 2. espèce	Flintglass 3. espèce 1. série.	Flintglass 3. espèce 2. série.	Flintglass 1. espèce	Sommes.
$L(-S'\Delta\Theta_i)$	8696365	8677385	9931231	1600963	1154076	1230116	2075590	4106912	4623171	4698111	4697261	4721200	
$L(\beta_1)$	2806612	2806613	2806612	2806612	2806612	2806612	2806612	2806612	2806612	2806612	2806612	2806612	
$L(-\vartheta_1')$	1502977	1483997	2737843	4107575	3960688	4036728	4882202	6913524	7430083	7505053	7503876	7527812	
ϑ_1'	-14135	-14074	-18784	-27590	-24893	-25332	-30777	-49131	-55336	-56300	-56281	-56595	-0,429231
$\Delta\Theta_1$	-14814	-14686	-19359	-27523	-25252	-25723	-30938	-48813	-51740	-55619	-55506	-56257	-0,429230
$\Delta^2\Theta_1$	-679	-612	-575	67	-359	-391	-161	318	596	681	778	338	0,000001
$L(-S'\Delta\Theta_i)$	8696365	8677385	9931231	1600963	1154076	1230116	2075590	4106912	4623471	4698411	4697264	4721200	
$L(\beta_2)$	2273007	2273007	2273007	2273007	2273007	2273007	2273007	2273007	3273007	2273007	2273007	2273007	
$L(-\vartheta_2')$	0969372	0950392	2204238	3873970	3127083	3503123	4348597	6379919	6896478	6971418	6970271	6994207	
ϑ_2'	-12501	-12116	-16612	-24400	-22011	-22403	-27218	-43150	-18938	-49790	-49777	-50052	-0,379601
$\Delta\Theta_2$	-12744	-12737	-16878	-24181	-22241	-22618	-27333	-43176	-48541	-49477	-49410	-49964	-0,379603
$\Delta^2\Theta_2$	-243	-291	-266	-81	-227	-215	-115	274	391	313	367	88	-0,000002
$L(-S'\Delta\Theta_i)$	8696365	8677385	9931231	1600963	1154076	1230116	2075590	24106912	4623171	4698441	4697261	4721200	
$L(\beta_3)$	0374332	0374332	0374332	0374332	0374332	0374332	0374332	0374332	0374332	0374332	0374333	0374332	
$L(-\vartheta_3')$	9070697	9021717	0305563	1975295	1528408	1604448	3449922	4481244	4997303	5072773	5071596	5095532	
ϑ_3'	-8071	-8039	-10729	-15759	-14218	-14169	-17579	-28062	-31607	-32157	-32148	-32326	-0,245167
$\Delta\Theta_3$	-7772	-7757	-10458	-15928	-14049	-14250	-17544	-28096	-31913	-32466	-32453	-32481	-0,245167
$\Delta^2\Theta_3$	302	282	271	-169	169	219	35	-34	-306	-309	-305	-155	0
$L(-S'\Delta\Theta_i)$	8696365	8677385	9931231	1600963	1154076	1230116	2075590	4106912	4623171	4698111	4697261	4721200	
$L(\beta_4)$	4967943	4967943	4967943	4967943	4967943	4967943	4967943	4967943	4967943	4967943	4967943	4967943	
$L(-\vartheta_4')$	3664308	3645328	4999174	6568906	6122019	6198059	7043533	9074855	9591414	9666384	9665207	9689143	
ϑ_4'	-2325	-2315	-3090	-4538	-4095	-4167	-5062	-8081	-9102	-9261	-9258	-9309	-0,070603
$\Delta\Theta_4$	-1704	-1694	-2519	-4355	-3678	-3782	-4822	-8639	-9785	-9947	-10097	-9581	-0,070603
$\Delta^2\Theta_4$	621	621	571	183	417	385	240	-558	-683	-686	-839	-272	0

Suite du 3ᵉ tableau.

	Eau 1. série.	Eau 2. série.	Solution de potasse.	Huile de térében-thine.	Crownglass 1. espèce	Crownglass 2. espèce	Crownglass 3. espèce	Flintglass 1. espèce	Flintglass 2. espèce	Flintglass 3. espèce 1. série.	Flintglass 3. espèce 2. série.	Flintglass 4. espèce	Sommes.
$L(-S'\Delta\Theta_i)$	8696365	8677385	9931231	1600963	1154076	1230116	2075590	4106912	4623171	4698141	4697261	4721200	
$L(-\beta_5)$	5819592	5819592	5819592	5819592	5819592	5819592	5819592	5819592	5819592	5819592	5819592	5819592	
$L(\vartheta_5')$	4515957	4496977	5750823	7420555	6973668	7019708	7895182	9926504	0143063	0518033	0516856	0540792	
ϑ_5'	2829	2816	3759	5522	4982	5070	6159	9832	11071	11267	11261	11326	0,085900
$\Delta\Theta_5$	3556	3491	4375	5660	5411	5570	6417	9184	10260	10555	10184	10936	0,085899
$\Delta^2\Theta_5$	727	675	616	138	429	500	258	- 648	- 811	- 712	- 780	- 390	- 0,000001
$L(-S'\Delta\Theta_i)$	8696365	8677385	9931231	1600963	1154076	1230116	2075590	4106912	4623171	4698141	4697261	4721200	
$L(-\beta_6)$	2345877	2315877	2315877	2315877	2315977	2315877	2315877	2315877	2315876	2345877	2345877	2345877	
$L(\vartheta_6')$	1012212	1023262	2287108	3946840	3199953	3575993	4121167	6452789	6969348	7041318	7043141	7067077	
ϑ_6'	12712	12657	16893	21813	22387	22782	27679	41183	49766	50638	50619	50899	0,386025
$\Delta\Theta_6$	12867	12795	17061	21851	22538	22820	27752	41067	49619	50150	50154	50722	0,386026
$\Delta^2\Theta_6$	155	138	168	38	151	38	73	- 118	- 117	- 183	- 165	- 177	0,000005
$L(-S'\Delta\Theta_i)$	8696365	8677385	9831231	1600963	1154076	1230116	2075590	4106912	4623171	4698141	4697261	4721200	
$L(-\beta_7)$	4626688	4626688	4626688	4626688	4646688	4626688	4626688	4626688	4626688	4626688	4626688	4626688	
$L(\vartheta_7')$	3323053	3304073	4557919	6227651	5780761	5856804	6702278	8733600	9250159	9325129	9323952	9347888	
ϑ_7'	21493	21400	28362	41953	37851	38320	46798	74707	84113	85608	85585	86057	0,652677
$\Delta\Theta_7$	20612	20586	27779	41778	37270	37980	46466	75474	85075	86501	86531	86624	0,752676
$\Delta^2\Theta_7$	- 881	- 814	- 783	- 175	- 581	- 540	- 332	767	932	893	916	567	- 0,000001

IV. TABLEAU.

Valeurs de γ_i.

	$\Delta^2\Theta_1$	$\Delta^2\Theta_2$	$\Delta^2\Theta_3$	$\Delta^2\Theta_4$	$\Delta^2\Theta_5$	$\Delta^2\Theta_6$	$\Delta^2\Theta_7$	$\Delta^2\Theta_3+\Delta^2\Theta_4+\Delta^2\Theta_5+\Delta^2\Theta_6$	$\Delta^2\Theta_1+\Delta^2\Theta_2+\Delta^2\Theta_7$	$S\Delta^2\Theta_i$	$S''\Delta^2\Theta_i$	$L(\pm S''\Delta^2\Theta_i)$
Eau, 1. série	-0,000679	-0,000243	0,000302	0,000621	0,000727	0,000155	-0,000881	0,001803	-0,001803	0,000002	0,003608	5572665
Eau, 2. série	-0,000612	-0,000291	0,000282	0,000621	0,000675	0,000138	-0,000814	0,001716	-0,001717	-0,000001	0,003433	5356738
Solution de potasse	-0,000575	-0,000266	0,000271	0,000571	0,000616	0,000168	-0,000783	0,001626	-0,001624	0,000002	0,003250	5118834
Huile de térébenthine	0,000067	-0,000081	-0,000169	0,000183	0,000138	0,000038	-0,000175	0,000190	-0,000189	0,000001	0,000379	5786392
Crowuglass, 1. espèce	-0,000359	-0,000227	0,000169	0,000417	0,000429	0,000152	-0,000581	0,001166	-0,001167	-0,000001	0,002333	3679147
Crowuglass, 2. espèce	-0,000391	-0,000215	0,000219	0,000385	0,000500	0,000038	-0,000540	0,001142	-0,001146	-0,000004	0,002288	3594560
Crowuglass, 3. espèce	-0,000161	-0,000115	0,000035	0,000240	0,000258	0,000073	-0,000332	0,000606	-0,000608	-0,000002	0,001214	0842187
Flintglass, 1. espèce	0,000318	0,000271	-0,000034	-0,000558	-0,000648	-0,000118	0,000767	-0,001358	0,001359	0,000001	-0,002717	4340896
Flintglass, 2. espèce	0,000596	0,000391	-0,000306	-0,000683	-0,000814	-0,000117	0,000932	-0,001920	0,001922	-0,000002	-0,003842	5845571
Flintglass, 3. espèce, 1. série	0,000681	0,000313	-0,000309	-0,000686	-0,000712	-0,000183	0,000893	-0,001890	0,001887	-0,000003	-0,003777	5771470
Flintglass, 3. espèce, 2. série	0,000778	0,000367	-0,000303	-0,000839	-0,000780	-0,000165	0,000946	-0,002089	0,002091	0,000002	-0,004180	6211763
Flintglass, 4. espèce	0,000338	0,000088	-0,000153	-0,000272	-0,800390	-0,000177	0,000567	-0,000994	0,000993	-0,000001	-0,001987	2981979
Sommes, Flintglass	0,002711	0,001136	-0,001109	-0,003038	-0,003344	-0,000760	0,004105				-0,016503	
Sommes, les autres substances	-0,002710	-0,001438	0,001109	0,003038	0,003343	-0,000761	-0,004106				0,016505	
$\Sigma\Delta^2\Theta_i$	0,000001	-0,000002	0	0	-0,000001	0,000001	-0,000001			$\Sigma S''\Delta^2\Theta_i$	0,00000	
$\Sigma''\Delta^2\Theta_i$	-0,005421	-0,002874	0,002218	0,006076	0,006687	0,001521	-0,008211			$\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i$	0,033008	
$L(\Sigma''\Delta^2\Theta_i)$	7340794	4584868	3159615	7836178	8252313	1821292	9149361			$L(\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i)$	5186192	
$L(\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i)$	5186192	5186192	5186192	5186192	5186192	5186192	5186192					
$L(\mp\gamma_i)$	2151602	9398676	8273423	2619986	3066121	6635100	3957769	$\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5+\gamma_6$	$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_7$	$S\gamma_i$	$S''\gamma_i$	
	-0,16423	-0,08707	0,06720	0,13408	0,20259	0,01688	-0,21876	0,49995	-0,50006	-0,00011	1,00001	

Comme on devait s'y attendre, les nombres compris dans ce tableau vérifient rigoureusement les deux conditions

$$S''\Sigma\Delta^2\Theta_i = \Sigma S''\Delta^2\Theta_i,\quad S''\Sigma''\Delta^2\Theta_i = \Sigma''S''\Delta^2\Theta_i$$

et avec une exactitude suffisante celles que comprennent les formules

$$S\Delta^2\Theta_i=0,\quad \Sigma\Delta^2\Theta_i=0,\quad S''\Sigma\Delta^2\Theta_i=\Sigma S''\Delta^2\Theta_i=0,\quad S\gamma_i=0,\quad S'\gamma_i=0,\quad S''\gamma_i=1;$$

ce qui prouve la justesse de nos calculs.

V. TABLEAU.

Valeurs de ϑ_i'' et de $\Delta^3\Theta_i$ exprimées en millionièmes.

	Eau		Solution de potasse.	Huile de térébenthine.	Crownglass			Flintglass					Sommes.
	1. série.	2. série.			1.espèce.	2.espèce.	3.espèce.	1.espèce.	2.espèce.	3.espèce. 1. série.	3.espèce. 2. série.	1.espèce.	
$L(\pm S''\Delta^2\Theta_i)$ $L(-\gamma_1)$	5572665 2151602	5356738 2151602	5118831 2151602	5786392 2151602	3679117 2151602	3591560 2151602	0812187 2151602	4310896 2151602	5815571 2151602	5771170 2151602	6211763 2151602	2981979 2151602	
$L(\mp\vartheta_1'')$	7727267	7511340	7273436	7910094	5833749	5749162	2996789	6495198	8000176	7926072	8366365	5136581	
ϑ_1'' $\Delta^2\Theta_1$	-593 -679	-561 -612	-531 -575	-62 67	-383 -359	-376 -391	-199 -161	416 318	631 596	620 681	686 778	326 338	-0,000002 0,000001
$\Delta^3\Theta_1$	-86	-48	-41	129	21	-15	38	-128	-35	61	92	12	0,000003
$L(\pm S''\Delta^2\Theta_i)$ $L(-\gamma_2)$	5572665 9398676	5356738 9398676	5118831 9398676	5786392 9398676	3679117 9398676	3591560 9398676	0812187 9398676	1310896 9398676	5815571 9398676	5771170 9398676	6211763 9398676	2981979 9398676	
$L(\mp\vartheta_2'')$	4971311	4755111	4517510	5185068	3077823	2993236	0210863	3739572	5241250	5170146	5610439	2380655	
ϑ_2'' $\Delta^2\Theta_2$	-311 -213	-299 -291	-283 -266	-33 -81	-203 -227	-199 -215	-106 -115	237 271	335 391	329 313	364 367	173 88	0,000001 -0,000002
$\Delta^3\Theta_2$	71	8	17	-18	-21	-16	-9	37	59	-16	3	-85	-0,000003
$L(\pm S''\Delta^2\Theta_i)$ $L(\gamma_3)$	5572665 8273123	5356738 8273123	5118831 8273123	5786392 8273123	3779117 8273123	3591560 8273123	0812187 8273123	1310896 8273123	5815574 8273123	5771170 8273123	6211763 8273123	2981979 8273123	
$L(\pm\vartheta_3'')$	3816088	3630161	3392257	4059815	1952570	1867983	9115610	2614319	4118997	4044893	4185186	1255102	
ϑ_3'' $\Delta^2\Theta_3$	212 302	231 282	218 271	25 -169	157 169	151 219	82 35	-183 -31	-258 -306	-251 -309	-281 -305	-131 -155	-0,000001 0
$\Delta^3\Theta_3$	60	51	53	-194	12	65	-47	149	-48	-55	-21	-21	0,000001

$L(\pm S'' \Delta^2\Theta_i)$ $L(\gamma_4)$	5572665 2619986	5356738 2619986	5118831 2619986	5786392 2619986	3679147 2619986	3594560 2619986	0842187 2619986	4310896 2619986	5845574 2619986	5771170 2619986	6211763 2619986	2981979 2619986	
$L(\pm \vartheta_4')$	8222651	8006724	7768820	8136378	6329130	8214516	3192173	6990882	8195560	8121456	8861719	5631965	
ϑ_4'' $\Delta^2\Theta_4$	664 621	632 621	598 571	70 183	429 417	421 385	223 210	-500 -558	-707 -683	-695 -686	-769 -839	-366 -272	0 0
$\Delta^3\Theta_4$	-43	-11	-27	113	-12	-36	17	-58	24	9	-70	94	0
$L(\pm S'' \Delta^2\Theta_i)$ $L(\gamma_5)$	5572665 3066121	5356738 3066121	5118831 3066121	5786392 3066121	3679147 3066121	3594560 3066121	0842187 3066121	4340896 3066121	5845574 3066121	5771170 3066121	6211763 3066121	2981979 3066121	
$L(\pm \vartheta_5'')$	8638786	8422859	8181955	8852513	6715268	6660681	3908308	7407017	8911695	8837591	9277884	6048100	
ϑ_5'' $\Delta^2\Theta_5$	731 727	695 675	658 616	77 138	473 429	461 500	216 258	-550 -618	-778 -814	-765 -712	-817 -780	-103 -390	0,000001 -0,000001
$\Delta^3\Theta_5$	-4	-20	-42	61	-41	36	12	-98	-36	53	67	13	-0,00000
$L(\pm S'' \Delta^2\Theta_i)$ $L(\gamma_6)$	5572665 6635100	5356738 6635100	5118831 6635100	5786392 6635100	3679147 6635100	3594560 6635100	0842187 6635100	4340896 6635100	5845571 6535100	5771170 6635100	6211763 6635100	2981979 6635100	
$L(\pm \vartheta_6')$	2207765	1991838	1753931	2121192	0311217	0229660	7177287	0975996	2180674	2106570	2816863	9617079	
ϑ_6'' $\Delta^2\Theta_6$	166 155	158 138	150 168	17 38	108 151	105 38	56 75	-125 -118	-177 -117	-171 -183	-193 -165	-92 -177	-0,000001 0,000001
$\Delta^3\Theta_6$	-11	-20	18	21	43	-67	17	7	60	-9	28	-85	0,000002
$L(\pm S'' \Delta^2\Theta_i)$ $L(-\gamma_7)$	5572665 3957769	5356738 3957769	5118831 3957769	5786392 3957769	3679147 3957769	3594560 3957769	0842187 3957769	4340896 3957769	5845571 3957769	5771470 3957769	6211763 3957769	2981979 3957769	
$L(\mp \vartheta_7')$	9530434	9314507	8076603	9744161	7636916	7552329	4799956	8298665	9803343	9729239	0169532	6939718	
ϑ_7'' $\Delta^2\Theta_7$	-898 -881	-854 -814	-808 -783	-91 -173	-580 -581	-569 -540	-302 -332	676 767	956 932	940 893	1010 946	491 567	0,000001 -0,000001
$\Delta^3\Theta_7$	17	40	25	-81	-1	29	-30	91	-24	-47	-91	73	-0,000002

VI. TABLEAU.

Valeurs de δ_i.

	$\Delta^3\Theta_1$	$\Delta^3\Theta_2$	$\Delta^3\Theta_3$	$\Delta^3\Theta_4$	$\Delta^3\Theta_5$	$\Delta^3\Theta_6$	$\Delta^3\Theta_7$	$\Delta^3\Theta_2+\Delta^3\Theta_3+\Delta^3\Theta_6+\Delta^3\Theta_7$	$\Delta^3\Theta_1+\Delta^3\Theta_4+\Delta^3\Theta_5$	$S\Delta^3\Theta_i$	$S'''\Delta^3\Theta_i$	$L(\pm S'''\Delta^3\Theta_i)$
Eau, 1re série	-0,000086	0,000071	0,000069	-0,000013	-0,000001	-0,000011	0,000017	0,000137	-0,008133	0,000001	0,000270	4318638
Eau, 2e série	-0,000018	0,000008	0,000051	-0,000011	-0,000020	-0,000020	0,000040	0,000079	-0,000079	0	0,000155	1986571
Solution de potasse	-0,000041	0,000017	0,000053	-0,000027	-0,000012	0,000018	0,000025	0,008113	-0,000110	0,000003	0,000223	3483049
Huile de térébenthine	0,000129	-0,000048	-0,000191	0,000113	0,000061	0,000021	-0,000081	-0,000302	0,000303	0,000001	-0,000605	7817554
Crownglass, 1re espèce	0,000024	-0,000024	0,000012	-0,000012	-0,000014	0,000013	-0,000001	0,000030	-0,000032	-0,000002	0,000062	7923917
Crownglass, 2e espèce	-0,000015	-0,000016	0,000065	-0,000036	0,000036	-0,000067	0,000029	0,000011	-0,000015	-0,000001	0,000026	1149734
Crownglass, 3e espèce	0,000038	-0,000009	-0,000017	0,000017	0,000012	0,000017	-0,000030	-0,000069	0,000067	-0,000002	-0,000136	1335389
Flintglass, 1re espèce	-0,000128	0,000037	0,000149	-0,000058	-0,000098	0,000017	0,000091	0,000284	-0,000084	0	0,000568	7543183
Flintglass, 2e espèce	-0,000035	0,000039	-0,000018	0,000021	-0,000036	0,000060	-0,000021	0,000017	-0,000017	0	0,000094	9731279
Flintglass, 3e espèce, 1re série	0,000061	-0,000016	-0,000055	0,000009	0,000053	-0,000009	-0,000047	-0,000127	0,000123	-0,000001	-0,000250	2979400
Flintglass, 3e espèce, 2e série	0,000092	0,000003	-0,000021	-0,060070	0,000067	0,000028	-0,000091	-0,000087	0,000089	0,000002	-0,000176	2455127
Flintglass, 4e espèce	0,000012	-0,000085	-0,000024	0,000091	0,000013	-0,000085	0,000073	-0,000118	0,000119	0,000001	-0,000237	3747484
Sommes: Eau, potasse, 1. et 2. espèces de crowngl. et flintgl.	-0,000329	0,000152	0,000312	-0,000163	-0,000208	0,000030	0,000177				0,001401	
Sommes: les autres substanc.	0,000332	-0,000155	-0,000311	0,000163	0,000206	-0,000028	-0,000179				-0,001401	
$\Sigma\Delta^3\Theta_i$	0,000003	-0,000003	0,000001	0	-0,000002	0,000002	0,000002			$\Sigma S'''\Delta^3\Theta_i$	-0,000003	
$\Sigma'''\Delta^3\Theta_i$	-0,000661	0,000307	0,000683	-0,000325	-0,000414	0,000058	0,000336			$\Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_i$	0,002805	
$L(\pm\Sigma'''\Delta^3\Theta_i)$	8202015	4871381	8314207	5131176	6170003	7631280	5511500			$L(\Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_i)$	4479329	
$L(\Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_i)$	4479329	4479329	4479329	4479329	4479329	4479329	4479329					
Différence	3722686	0392055	3864878	0652847	1690674	3151951	1035171	$\delta_2+\delta_3+\delta_6+\delta_7$	$\delta_1+\delta_4+\delta_5$	$S\delta_i$	$S'''\delta_i$	
δ_i	-0,2357	0,1094	0,2435	-0,1162	-0,1476	0,0207	0,1269	0,5005	-0,4995	-0,0010	1,000	

Comme on devait s'y attendre, les nombres compris dans ce tableau vérifient rigoureusement les deux conditions

$$S'''\Sigma\Delta^3\Theta_i = \Sigma S'''\Delta^3\Theta_i, \quad S''\Sigma''\Delta^3\Theta_i = \Sigma'''S''\Delta^3\Theta_i$$

et, avec une exactitude suffisante, celles que comprennent les formules

$$S\Delta^3\Theta_i = 0, \quad \Sigma\Delta^3\Theta_i = 0, \quad S'''\Sigma\Delta^3\Theta_i = \Sigma S'''\Delta^3\Theta_i, \quad S\delta_i = 0, \quad S\delta_i = 0, \quad S''\delta_i = 0, \quad S''\delta_i = 0;$$

ce qui prouve la justesse de nos calculs.

VII. TABLEAU.

Valeurs de ϑ_i''' et de $\Delta'\Theta_i$ exprimées en millionièmes.

	Eau		Solution de potasse.	Huile de térebenthine.	Crownglass			Flintglass					Sommes.
	1. série.	2. série.			1. espèce	2. espèce	3. espèce	1. espèce	2. espèce	3. espèce 1. série.	3. espèce 2. série.	4. espèce	
$L(\mp S''\Delta'\Theta_i)$	4313638	1986571	3483049	7817554	7923917	4149731	1335389	7543183	9731279	3979400	2455127	3747181	
$L(-\delta_1)$	3722686	3722686	3722686	3722686	3722686	3722686	3722686	3722686	3722686	3722686	3722686	3722686	
$L(\mp\vartheta_1'')$	8036324	5709257	7205733	1540240	1616603	7872420	5058075	1266169	8453965	7702086	6177813	7170170	
ϑ_1'''	-64	-37	-53	143	-13	-6	32	-134	-22	59	41	56	0,000003
$\Delta'\Theta_1$	-86	-48	-11	129	21	-15	38	-128	-35	61	92	12	0,000005
$\Delta'\Theta_1$	-22	-11	12	-14	39	-8	6	6	-13	2	51	-44	0
$L(\pm S''\Delta'\Theta_i)$	1313638	1986571	3483049	7317554	7923917	4149734	1335389	7543183	9721279	3979400	2455127	3747184	
$L(\delta_2)$	0392055	0392055	0392055	0392055	0392055	0392055	0392055	0392055	0392055	0392055	0392055	0392055	
$L(\pm\vartheta_2'')$	4705693	2378626	3875404	8209609	8315972	1541789	1727444	7935538	0423331	4371455	2847182	1139539	
ϑ_2'''	30	17	24	+66	7	3	-15	62	10	-27	-19	-26	0
$\Delta'\Theta_2$	71	8	17	-48	-24	-16	-9	37	59	-16	3	-85	-0,000003
$\Delta'\Theta_2$	41	-9	-7	18	-31	-19	6	-25	49	11	22	-59	-0,00000[illegible]
$L(+S'''\Delta'\Theta_i)$	4313638	1986571	3483049	7817554	7923917	4149734	1335389	7543183	9731279	3979400	2455127	3747184	
$L(\delta_3)$	3864878	3864878	3864878	3864878	3864878	3864878	3864878	3864878	3864878	3864878	3864878	3864878	
$L(\pm\vartheta_3'')$	8178516	5851449	7317927	1682132	1788795	8014612	5200267	1408361	3596157	7841278	6320005	7612362	
ϑ_3'''	66	38	51	-147	13	6	-33	138	23	-61	-43	-58	-0,000002
$\Delta'\Theta_3$	60	51	53	-194	12	63	-47	119	-48	-55	-24	-21	0,000001
$\Delta'\Theta_3$	-6	13	-1	-47	-3	59	-14	11	71	8	19	37	0,00000[illegible]
$L(+S'''\Delta'\Theta_i)$	4313638	1986571	3483019	7817551	7923917	4119734	1835389	7543483	9731279	3979400	2455127	3717484	
$L(-\delta_4)$	0652847	0652847	0652847	0652847	0652847	0652847	0652847	0652847	0652847	0652847	0652847	0652847	
$L(\mp\vartheta_4'')$	4966185	2639418	4135896	8170401	8576761	4802581	1988236	8196330	0381126	4632247	3107974	4400331	
ϑ_4'''	-31	-13	-26	70	-7	-3	16	-66	-11	29	20	28	0,000001
$\Delta'\Theta_4$	-13	-11	-27	113	-12	-36	17	-58	21	9	-70	91	0
$\Delta'\Theta_4$	-12	7	-1	43	-5	-33	1	8	35	-20	-90	66	-0,000001

Suite du 7e tableau.

	Eau 1. série.	Eau 2. série.	Solution de potasse.	Huile de térébenthine.	Crownglass 1. espèce.	Crownglass 2. espèce.	Crownglass 3. espèce	Flintglass 1. espèce.	Flintglass 2 espèce.	Flintglass 3. espèce. 1. série.	Flintglass 3. espèce. 2. série.	Flintglass 4. espèce.	Sommes.
$L(\pm S'''\Delta^5\Theta_i)$ $L(-\delta_5)$	4313638 1690674	1986571 1690674	3483049 1690671	7817554 1690674	7923917 1690674	4119731 1690674	1335389 1690674	7513183 1690674	9731279 1690674	3979100 1690671	2155127 1690671	3747484 1690674	
$L(\mp \vartheta_5'')$	6004312	3677245	5173723	9508228	9614591	5840108	3026063	9231157	1421953	5670074	4115801	5138158	
ϑ_5''' $\Delta^5\Theta_5$	-40 -4	-23 -29	-43 -42	89 61	-9 -41	-1 36	20 12	-81 -98	-14 -36	37 53	26 67	35 13	0 -0,000002
$\Delta^4\Theta_5$	36	3	-9	-28	-35	40	-8	-14	-22	16	41	-22	-0,000002
$L(\pm S'''\Delta^5\Theta_i)$ $L(\delta_6)$	4313638 3151951	1986571 3151951	3183019 3154951	7817554 3151951	7923917 3151951	4119731 3151951	1335389 3154951	7543183 3151951	9731279 3154951	3979400 3154951	2155127 3154951	3747481 3151951	
$L(\pm \vartheta_6'')$	7168589	5141522	6638000	0972505	1018868	7301685	4490340	0698131	2886230	7134351	5610078	6902135	
ϑ_6''' $\Delta^5\Theta_6$	6 -11	3 -20	5 18	-13 21	1 43	1 -67	-3 17	12 7	2 60	-5 -9	-4 28	-5 -85	0 0,000002
$\Delta^4\Theta_6$	-17	-23	13	31	42	-68	20	-5	-58	-1	32	-80	0,000002
$L(\pm S'''\Delta^5\Theta_i)$ $L(\delta_7)$	4313638 1035171	1986571 1035171	3483049 1035171	7817554 1035171	7923917 1035171	4119731 1035171	1335389 1035171	7543483 1035171	9731279 1035171	3979100 1035171	2155127 1035171	3747184 1035171	
$L(\pm \vartheta_7'')$	5318809	3021712	1518220	8852725	8959088	5181905	2370560	8578654	0766150	5014571	3190298	4782655	
ϑ_7''' $\Delta^5\Theta_7$	31 17	20 40	28 25	-77 -81	8 -1	3 29	-17 -30	72 91	12 -24	-32 -47	-22 -91	-30 73	-0,000001 -0,000002
$\Delta^4\Theta_7$	-17	20	-3	-4	-9	26	-13	19	-36	-15	-72	103	-0,000001

D'après le tableau qui précède, la plus grande des valeurs numériques de $\Delta^4\Theta_i$, représentée par le nombre

$$0{,}000103\,,$$

est de beaucoup inférieure au nombre

$$0{,}000159$$

qui représente la plus grande des valeurs numériques des variations de Θ_i comprises dans la 7e ligne horizontale du 7e tableau du §. 6, d'où il résulte encore que dans l'application de nos formules aux expériences de Frauenhofer on peut, sans erreur sensible, réduire le premier nombre de l'équation (1) ou (9) [§. 6] à ses quatre premiers termes. Il y a plus, en raisonnant comme dans le §. 6, on prouvera que les valeurs de Θ_i déduites de l'expérience méritent moins de confiance que les valeurs corrigées de Θ_i qu'on tirerait des équations (1) en y remplaçant généralement $\Delta^4\Theta_i$ par zéro. D'ailleurs, comme en vertu des formules (1) on aura

$$\Theta_i = \Theta + \vartheta_i' + \vartheta_i'' + \vartheta_i''' + \Delta^4\Theta_i\,, \tag{7}$$

les valeurs corrigées de Θ_i, ou celles qu'on obtiendra en remplaçant, dans le second membre de l'équation (7), $\Delta^4\Theta_i$ par zéro, seront évidemment les diverses valeurs du polynome

$$\Theta + \vartheta_i' + \vartheta_i'' + \vartheta_i''' = \Theta_i - \Delta^4\Theta_i. \tag{8}$$

Cela posé, on tirera sans peine des 1er, 3e, 5e et 7e tableaux le tableau suivant qui offre non seulement les valeurs de Θ_i immédiatement déduites de l'expérience, mais aussi les valeurs corrigées de Θ_i, ou, en d'autres termes les valeurs de

$$\Theta_i - \Delta^4\Theta_i\,,$$

et montre comment ces dernières valeurs se trouvent formées par l'addition des quantités

$$\Theta,\ \vartheta_i',\ \vartheta_i'',\ \vartheta_i'''.$$

VIII. TABLEAU.

Valeurs de ϑ_i', ϑ_i'', ϑ_i''' *et de* $\Theta_i - \Delta^4\Theta_i$.

	Eau		Solution de potasse.	Huile de térébenthine.	Crownglass			Flintglass					Sommes.
	1. série.	2. série.			1. espèce	2. espèce	3. espèce	1. espèce	2. espèce	3. espèce 1. série.	3. espèce 2. série.	4. espèce	
Θ ϑ_1' ϑ_1'' ϑ_1'''	1,786201 -14135 -598 -64	1,786186 -14074 -561 -37	1,978320 -18781 -531 -53	2,189883 -27590 -62 143	2,348779 -24893 -333 -15	2,353887 -25332 -376 -6	2,418260 -30777 -199 32	2,615351 -19131 446 -134	2,690721 -55336 631 -22	2,701331 -56300 620 59	2,701322 -56281 686 41	2,705825 -56595 326 56	28,306066 -0,429231 -2 0
$\Theta_1 - \Delta^4\Theta_1$ $\Delta^4\Theta_1$	1,771109 -22	1,771511 -11	1,958949 12	2,162374 -14	2,323188 39	2,328173 -9	2,417316 6	2,566532 6	2,635994 -13	2,645710 2	2,615765 51	2,619612 -44	27,876833 3
Θ_1	1,771387	1,771500	1,958961	2,162360	2,323327	2,328164	2,417322	2,566538	2,635981	2,645712	2,615816	2,619568	27,876836
Θ ϑ_2' ϑ_2'' ϑ_2'''	1,786201 -12501 -311 30	1,786186 -12116 -299 17	1,978320 -16612 -283 21	2,189883 -21100 -33 -66	2,348779 -22014 -203 7	2,353887 -22103 -199 3	2,448260 -27218 -106 -15	2,615351 -43450 237 62	2,690721 -48938 335 10	2,701331 -19790 329 -27	2,701322 -49771 361 -19	2,705825 -50052 173 -26	28,306066 -0,379601 1 0
$\Theta_2 - \Delta^4\Theta_2$ $\Delta^4\Theta_2$	2,773116 41	1,773458 -9	1,961419 -7	2,165381 18	2,326569 -31	2,331288 -19	2,420921 6	2,572200 -25	2,642128 49	2,651843 11	2,651890 22	2,655920 -59	27,926466 -3
Θ_2	1,773157	1,773449	2,961412	2,165102	2.326538	2,331269	2,420927	2,572175	2,642177	2,651854	2,651912	2,655861	27,926463
Θ ϑ_3' ϑ_3'' ϑ_3'''	1,786201 -8074 242 66	1,786186 -8039 231 38	1,978320 -10729 218 54	2,189883 -15759 25 -117	2,348779 -11218 157 15	2,353887 -14469 154 6	2,418260 -17579 82 -33	2,615351 -28062 -183 138	2,690721 -31607 -258 23	2,701331 -32157 -254 -61	2,701322 -32118 -281 -43	2,705825 -32326 -134 -58	28,306066 -0,215167 -1 -2
$\Theta_3 - \Delta^4\Theta_3$ $\Delta^4\Theta_3$	1,778135 -6	1,778116 13	1,967863 -1	2,171002 -47	2,334733 -3	2,339578 59	2,430730 -14	2,587244 11	2,638879 -71	2,668859 6	2,668850 19	2,673307 37	28,060896 3
Θ_3	1,778129	1,778129	1,967862	2,173955	2,331730	2,339637	2,430716	2,587255	2,658808	2,668865	2,668869	2,673344	28,060899

Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,348779	2,353887	2,418260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	28,306066
ϑ_4'	-2323	-2315	-3090	-4538	-4095	-4167	-5062	-8081	-9102	-9261	-9258	-9309	-0,070603
ϑ_4''	664	632	598	70	429	421	223	-500	-707	-695	-769	-366	0
ϑ_4'''	-31	-18	-26	70	-7	-3	16	-66	-11	29	20	28	1
$\Theta_4 - \Delta^4\Theta_4$	1,784509	1,784185	1,975802	2,185485	2,345106	2,350138	2,443137	2,606704	2,680901	2,691404	2,691315	2,696178	28,235164
$\Delta^4\Theta_4$	-12	7	-1	43	-5	-33	1	8	35	-20	-90	66	-1
Θ_4	1,784497	1,784192	1,975801	2,185528	2,345101	2,350105	2,443138	2,606712	2,680936	2,691384	2,691225	2,696244	28,235163
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,348779	2,353887	2,418260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	28,306066
ϑ_5'	2829	2816	3759	5522	4982	5070	6159	9832	11074	11267	11264	11326	0,085900
ϑ_5''	731	695	658	77	473	461	216	-550	-778	-765	-817	-403	1
ϑ_5'''	-40	-23	-33	89	-9	-4	20	-84	-11	37	26	35	0
$\Theta_5 - \Delta^4\Theta_5$	4,789721	1,789674	1,982704	2,195571	2,354225	2,359417	2,451685	2,624519	2,701003	2,711870	2,711765	2,716783	28,391967
$\Delta^4\Theta_5$	36	3	-9	-28	-35	40	-8	-14	-22	16	41	-22	-2
Θ_5	1,789757	1,789677	1,982695	2,195543	2,354190	2,359457	2,451677	2,624535	2,700981	2,711886	2,711806	2,716761	38,891965
Θ	1,76201	1,786186	1,978320	2,189883	2,348779	2,353887	2,448260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	28,306066
ϑ_6'	12712	12657	16893	24813	22387	22782	27679	44183	49766	50633	50619	50899	0,386025
ϑ_6''	166	158	150	17	108	105	56	-125	-177	-174	-193	-92	-1
ϑ_6'''	6	3	5	-13	1	1	-3	12	2	-5	-4	-5	0
$\Theta_6 - \Delta^4\Theta_6$	1,799085	1,799004	1,995368	2,214700	2,371275	2,376775	2,475992	2,659423	2,740312	2,751785	2,751744	2,756627	28,692090
$\Delta^4\Theta_6$	-17	-23	13	34	42	-68	20	-5	58	-4	32	-80	2
Θ_6	1,799068	1,798981	1,995381	2,214734	2,371317	2,376707	2,476012	2,659418	2,740370	2,751781	2,751776	2,756547	28,692092
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,348779	2,353887	2,418260	2,615351	2,690721	2,701381	2,701322	3,705825	28,806066
ϑ_7'	21493	21400	28562	41953	37851	38520	46798	74707	84143	85608	85585	86057	0,652677
ϑ_7''	-898	-854	-808	-94	-580	-569	-302	676	956	940	1040	494	1
ϑ_7'''	34	20	23	-77	8	3	-17	72	12	-32	-22	-30	-1
$\Theta_7 - \Delta^4\Theta_7$	1,806830	1,806752	2,006102	2,231665	2,386058	2,391811	2,494739	2,690806	2,775832	2,787847	2,787925	2,792346	28,958743
$\Delta^4\Theta_7$	-17	20	-3	-4	-9	26	-13	19	-36	-15	-72	103	-1
Θ_7	1,806813	1,806772	2,006099	2,231661	2,386049	2,391867	2,494726	2,690825	2,775796	2,787832	2,787853	2,792419	28,958712

Dans le 8e tableau, ainsi qu'on devait s'y attendre, les valeurs numériques des quatre quantités

(9) $$\Theta, \quad \vartheta_i', \quad \vartheta_i'', \quad \vartheta_i''',$$

forment généralement une suite décroissante. La seule substance pour laquelle cette condition ne soit pas toujours remplie est l'huile de térébenthine. Encore, pour cette substance, les exceptions sont elles seulement relatives à la valeur numérique de ϑ_i''' qui devient supérieure, quand il s'agit des rayons *B, C, D, F*, à la valeur numérique de ϑ_i''.

Les valeurs de

$$\Theta_i - \varDelta^4\Theta_i$$

fournies par le 8e tableau, c'est à dire en d'autres termes, les carres des indices de réfraction, calculés pour les rayons et les substances aux quelles se rapportent les expériences de Frauenhofer, et corrigés d'après les principes ci-dessus exposés, se réduisent évidemment, pour chaque substance, à sept valeurs particulieurs d'une même fonction linéaire des quantités

$$\beta_i, \quad \gamma_i, \quad \delta_i,$$

et pour chaque rayon à des valeurs parteculieres d'un fonction linéaire des seules quantités

(10) $$\Theta = \tfrac{1}{7}\mathrm{S}\,\Theta_i, \quad U' = \mathrm{S}'\Theta_i, \quad U'' = \mathrm{S}''\Theta_i, \quad U''' = \mathrm{S}'''\Theta_i.$$

En effet, l'on tirera sucessivement des équations (1) et (4)

$$\varDelta\Theta_i = \Theta i - \Theta,$$
$$\mathrm{S}'\varDelta\Theta_i = \mathrm{S}'(\Theta_i - \Theta) = \mathrm{S}'\Theta_i - \Theta = U' - \Theta,$$

puis

$$\vartheta_i' = (U' - \Theta)\,\beta_i,$$
$$\varDelta^2\Theta_i = \varDelta\Theta_i - \vartheta_i' = \Theta_i - \Theta - (U' - \Theta)\,\beta_i,$$
$$\mathrm{S}''\varDelta^2\Theta_i = \mathrm{S}''\{\Theta_i - \Theta - (U' - \Theta)\,\beta_i\} = \mathrm{S}''\Theta_i - \Theta - (U' - \Theta)\,\mathrm{S}''\beta_i$$
$$= U'' - \Theta - (U' - \Theta)\,\mathrm{S}''\beta_i,$$

puis encore

$$\vartheta_i'' = \{U'' - \Theta - (U' - \Theta)\,\mathrm{S}''\beta_i\}\,\gamma_i,$$
$$\varDelta^3\Theta_i = \varDelta^2\Theta_i - \vartheta_i'' = \Theta i - \Theta - (U' - \Theta)\,\beta_i - \{U'' - \Theta - (U' - \Theta)\,\mathrm{S}''\beta_i\}\,\gamma^i,$$
$$\mathrm{S}'''\varDelta^3\Theta_i = \mathrm{S}'''\{\Theta_i - \Theta - (U' - \Theta)\,\beta_i - [U'' - \Theta - (U' - \Theta)\,\mathrm{S}''\beta_i]\}\,\gamma_i$$
$$= U''' - \Theta - (U' - \Theta)\,\mathrm{S}'''\beta_i - [U'' - \Theta - (U' - \Theta)\,\mathrm{S}''\beta_i]\,\mathrm{S}'''\gamma_i,$$

et enfin

$$\vartheta_i''' = \{U''' - \Theta - (U' - \Theta)\, S'''\beta_i - [U''' - \Theta - (U' - \Theta)\, S''\beta_i]\, S'''\gamma_i\}\, \delta_i$$

Or, en substituant les valeurs précédentes de

$$\vartheta_i', \quad \vartheta_i'', \quad \vartheta_i''',$$

dans le premier membre de l'équation (8), on tirera de cette équation

$$(11) \qquad \Theta_i - \Delta'\Theta_i = \Theta + (U' - \Theta)\beta_i + [U'' - \Theta - (U' - \Theta)S''\beta_i]\,\gamma_i$$
$$+ \{U''' - \Theta - (U' - \Theta)S'''\beta_i - [U'' - \Theta - (U' - \Theta)\,S''\beta_i]\,S'''\gamma_i\}\,\delta_i,$$

Telle est la formule à l'aide de laquelle la valeur corrigée de Θ_i, ou, ce qui revient au même, la valeur de $\Theta_i - \Delta'\Theta_i$ se trouve déterminée pour chaque substance en fonction linéaire des quantités

$$\beta_i, \quad \gamma, \quad \delta_i$$

qui varient avec les divers rayons, et pour chaque rayon en fonction linéaire des quantités

$$\Theta, \quad U, \quad U', \quad U''$$

qui varient avec la substance que l'on considère. D'ailleurs on reconnoitra sans peine 1° que, si le second membre de la formule (11) est substitué à la place de $\Theta_i - \Delta'\Theta_i$ dans les quatre sommes

$$S(\Theta_i - \Delta'\Theta_i), \quad S'(\Theta_i - \Delta'\Theta_i), \quad S''(\Theta_i - \Delta'\Theta_i), \quad S'''(\Theta_i - \Delta'\Theta_i),$$

ces quatre sommes, réduites à leur expression la plus simple en vertu des équations (5), deviendront, comme on devait s'y attendre,

$$7\,\Theta = S\Theta_i, \quad U' = S'\Theta_i, \quad U'' = S''\Theta_i, \quad U''' = S'''\Theta_i;$$

2° qu'en substituant l'air au milieu réfringent et posant en conséquence

$$\Theta_i = 1, \quad \Theta = U' = U'' = U''' = 1,$$

on réduit le second membre de la formule (11) à l'unité.

Pour tirer de la seule formule (11) les valeurs corrigées de Θ_i relatives aux divers rayons et aux diverses substances, il suffirait d'y substituer les valeurs de

$$\Theta, \quad U' = S'\Theta_i, \quad U'' = S''\Theta_i, \quad U''' = S'''\Theta_i,$$

et de

$$\beta_i, \quad \gamma_i, \quad \delta_i$$

fournies par les tableaux 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ou, ce qui revient au même, par les suivants.

IX. TABLEAU.

Valeurs de Θ, U', U'', U'''.

	Eau		Solution de potasse.	Huile de térében-thine.	Crownglass			Flintglass				
	1. série.	2. série.			1. espèce	2. espèce	3. espèce	1. espèce	2. espèce	3. espèce 1. série.	3. espèce 2. série.	4. espèce
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883	2,348779	2,353887	2,418260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705325
U'	-0,074069	-0,073746	-0,098429	-0,141576	-0,130139	-0,132743	-0,161272	0,257119	-0,289966	-0,295015	-0,294935	-0,296565
U''	0,003608	0,003133	0,003250	0,000379	0,002333	0,002288	0,001214	-0,002717	-0,003842	-0,003777	-0,004180	-0,001987
U'''	0,000270	0,000155	0,000223	-0,000605	0,000062	0,000026	-0,000136	0,000568	0,000094	-0,000250	-0,000176	-0,000237

X. TABLEAU.

Valeurs de β_i, γ_i, δ_i.

i	1	2	3	4	5	6	7	Sommes des valeurs numériques.
β_i	0,190836	0,168772	0,109002	0,031390	-0,038191	-0,171628	-0,290181	1,000000
γ_i	-0,16423	-0,08707	0,06720	0,18408	0,20259	0,04608	-0,24876	1,00001
δ_i	-0,2357	0,1094	0,2435	-0,1162	-0,1476	0,0207	0,1269	1,0000

Alors les valeurs de

$$S''\beta_i, \quad S'''\beta_i, \quad S'''\gamma_i,$$

déduites des formules (6), ou, ce qui revient au même des équations (137) du § 6, deviendront respectivement

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} S''\beta_i &= 0{,}430573 - 0{,}569427 = -0{,}138854, \\ S''\beta_i &= 0{,}315965 - 0{,}684035 = -0{,}368070, \\ S'''\gamma_i &= 0{,}27751 \;\; - 0{,}72250 \;\; = -0{,}44499. \end{aligned} \right.$$

Aux valeurs corrigées de Θ_i fournies par le 8ᵉ tableau, ou, ce qui revient au même, par la formule (11), et représentées par

$$\Theta_i - \Delta'\Theta_i$$

correspondront des valeurs corrigées de θ_i que nous représenterons par

$$\theta_i - \Delta'\theta_i,$$

et qui seront déterminées par la formule (139) du § 6, à la quelle on pourra substituer encore la formule (142) du même paragraphe, savoir,

$$(13) \qquad \Delta'\theta_i = \frac{\Delta'\Theta_i}{2\theta_i} = \tfrac{1}{2}\,\theta_i^{-1}\Delta'\Theta_i$$

Or de cette derniere formule, combinée avec le 3ᵉ tableau du § 6 et le 7ᵉ tableau du § 7, on tirera, en effectuant le calcul par logarithmes, les valeurs suivantes de

$$\theta_i^{-1}\Delta'\Theta_i \quad \text{et de} \quad \Delta'\theta_i.$$

XI. TABLEAU.

Valeurs de $\theta^{-1}\Delta^4\Theta_i$ et de $\Delta^4\theta_i$ exprimées en millionièmes.

	Eau		Solution de potasse.	Huile de térébenthine.	Crownglass			Flintglass				
	1. série.	2. série.			1. espèce.	2. espèce.	3. espèce	1. espèce.	2. espèce.	3. espèce. 1. série.	3. espèce. 2. série.	4. espèce.
$L(\mp\Delta^4\Theta_1)$	3424	0114	0792	1461	5911	9542	7782	7782	1139	3010	7076	6435
$L(\theta_1)$	1242	1242	1160	1675	1831	1835	1917	2017	2105	2113	2113	2116
Différence	2182	9172	9332	9786	4080	7707	5865	5735	9031	0879	4963	4319
$\theta_1^{-1}\Delta^4\Theta_1$	-17	-8	8	-10	26	-6	4	4	-8	1	31	-27
$\Delta^4\theta_1$	-8	-4	4	-5	13	-3	2	2	-4	1	16	-14
$L(+\Delta^4\Theta_2)$	6128	9542	8451	2553	4911	2788	7782	3979	6902	0114	3424	7709
$L(\theta_2)$	1244	1244	1163	1678	1831	1838	1920	2052	2110	2118	2118	2121
Différence	1884	8298	6988	0875	3080	0950	5862	1927	4792	8296	1306	5588
$\theta_2^{-1}\Delta^4\Theta_2$	31	-7	5	12	-20	-12	4	-16	30	7	14	-36
$\Delta^4\theta_2$	15	-3	-2	6	-10	-6	2	-8	-15	3	7	-18
$L(\mp\Delta^4\Theta_3)$	7782	1139	0	6721	4771	7709	1161	0111	8513	7782	2788	5682
$L(\theta_3)$	1250	1250	1470	1686	1811	1816	1929	2064	2123	2132	2132	2135
Différence	6532	9889	8530	5035	2930	5863	9532	8350	6390	5650	0656	3547
$\theta_3^{-1}\Delta^4\Theta_3$	1	10	-1	-32	-2	39	-9	7	-41	4	12	23
$\Delta^4\theta_3$	-2	5	0	-16	-1	19	-1	3	-22	2	6	11
$L(\mp\Delta^4\Theta_4)$	0792	8151	0	6335	6990	5185	0	9031	5111	3010	9512	8195
$L(\theta_4)$	1258	1258	1179	1698	1851	1855	1910	2080	2111	2150	2150	2154
Différence	9534	7193	8521	4637	5139	3330	8060	6951	3300	0860	7392	6011
$\theta_4^{-1}\Delta^4\Theta_4$	-9	5	-1	23	-3	-22	1	5	21	-12	-55	40
$\Delta^4\theta_4$	-4	3	0	13	-2	-11	0	2	11	-6	-27	20
$L(+\Delta^4\Theta_5)$	5563	4771	9512	4172	5111	6021	9031	1161	3124	2011	6128	3121
$L(\theta_5)$	1264	1261	1486	1708	1859	1861	1950	2095	2158	2166	2166	2170
Différence	4299	3507	8056	2761	3582	1157	7081	9366	1266	9873	3962	1254
$\theta_5^{-1}\Delta^4\Theta_5$	27	2	-6	-19	-23	26	-5	-9	-13	10	25	-13
$\Delta^4\theta_5$	13	1	-3	-9	-11	13	-3	-1	-7	5	12	-7
$L(\mp\Delta^4\Theta_6)$	2304	3617	1139	5185	6232	8325	3010	6990	7634	6021	5051	9031
$L(\theta_6)$	1275	1275	1500	1727	1875	1880	1969	2124	2189	2198	2198	2202
Différence	1029	2342	9639	3458	4357	6445	1041	4866	5445	3823	2853	6829
$\theta_6^{-1}\Delta^4\Theta_6$	-13	-17	9	22	27	-41	13	-3	35	-2	19	-48
$\Delta^4\theta_6$	-6	-9	5	11	14	-22	6	-2	18	-1	10	-24
$L(\mp\Delta^4\Theta_7)$	2304	3010	4771	6021	9542	4150	1139	2788	5563	1761	8573	0128
$L(\theta_7)$	1285	1285	1512	1743	1888	1891	1985	2119	2217	2226	2226	2230
Différence	1019	1725	3259	4278	7654	2256	9154	0639	3346	9535	6347	7898
$\theta_7^{-1}\Delta^4\Theta_7$	-13	15	-2	-3	6	17	-8	12	-22	-9	-13	62
$\Delta^4\theta_7$	-6	7	-1	-1	-3	8	-1	6	-11	-4	-22	31

Les valeurs précédentes de $\Delta'\Theta_i$ doivent satisfaire aux mêmes conditions que les valeurs de $\Delta'\theta_i$ contenues dans le 22ᵉ tableau du § 6, et fournir, pour les quantités (150), ou (151) du même paragraphe, des valeurs numériques égales mais affectées de signes contraires. Ces conditions se trouvent effectivement remplies avec une exactitude suffisante, comme le prouve le nouveau tableau que nous allons tracer.

XII. TABLEAU.

Valeurs de $\Delta\theta_i$, $\Delta'\theta_1 + \Delta'\theta_2$, etc. . . . . exprimées en millionièmes.

	Eau		Solution de potasse.	Huile de térébenthine.	Crownglass			Flintglass				
	1. série.	2. série.			1. espèce	2. espèce	3. espèce	1. espèce	2. espèce	3. espèce 1. série	3. espèce 2. série	4. espèce
$\Delta'\theta_1$	-8	-4	4	-5	13	-3	2	2	-4	1	16	-11
$\Delta'\theta_2$	15	-3	-2	6	-10	-6	2	-8	15	8	7	-18
$\Delta'\theta_3$	-2	5	0	-16	-1	18	-4	3	-22	2	6	11
$\Delta'\theta_4$	-4	3	0	15	-2	-11	0	2	11	-6	-27	20
$\Delta'\theta_5$	13	1	-3	-9	-11	13	-8	-4	-7	5	12	-7
$\Delta'\theta_6$	-6	-9	5	11	11	-22	6	-2	18	-1	10	-21
$\Delta'\theta_7$	-6	7	-1	-1	-3	8	-4	6	-11	-4	-22	31
$\Delta'\theta_1 + \Delta'\theta_2$	7	-7	2	1	3	-9	4	-6	11	4	23	-32
$\Delta'\theta_3 + \Delta'\theta_4$	-6	8	0	-1	-3	8	-4	5	-11	-4	-21	31
$\Delta'\theta_5 + \Delta'\theta_6$	7	-8	2	2	3	-9	3	-6	11	4	22	-31
$\Delta'\theta_7$	-6	7	-1	-1	-3	8	-4	6	-11	-4	-22	31
$\Delta'\theta_1$	-8	-4	4	-5	13	-3	2	2	-4	1	16	-11
$\Delta'\theta_2 + \Delta'\theta_7$	9	4	-3	5	-13	2	-2	-2	4	-1	-15	13
$\Delta'\theta_3 + \Delta'\theta_6$	-8	-4	5	-5	13	-3	2	1	-4	1	16	-13
$\Delta'\theta_4 + \Delta'\theta_5$	9	4	-3	6	-13	2	-3	-2	4	-1	-15	13

Les résultats fournis par le 11ᵉ ou 12ᵉ tableau peuvent encore être invoqués à l'appui de l'assertion précédemment émise, suivant laquelle les valeurs de $\Delta'\Theta_i$ et par suite celles de $\Delta'\theta_i$ doivent être comparables aux erreurs d'observation. Effectivement il résulte du 23ᵉ tableau [§ 6] que les valeurs de θ_i données par les expériences de Frauenhofer admettent des erreurs comparables aux nombres 0,000042 ; 0,000049 ; et ces nombres surpassent notablement les nombres 0,000027 ; 0,000037, qui dans les 11ᵉ et 12ᵉ tableaux représentent les plus grandes valeurs numériques de $\Delta'\theta_i$.

Si l'on retranche les valeurs de $\Delta'\theta_i$ fournies par le 11ᵉ tableau des valeurs de θ_i données par le 1ᵉ tableau du § 6, on obtiendra les valeurs corrigées de θ_i ou, en d'autres termes, les valeurs de

$$\theta_i - \Delta'\theta_i$$

telles que les présente le tableau suivant. 22

XIII. TABLEAU.

Valeurs de $\theta_i - \Delta^4\theta_i$.

	Eau 1. série.	Eau 2. série.	Solution de potasse.	Huile de térébenthine.	Crownglass 1. espèce.	Crownglass 2. espèce.	Crownglass 3. espèce.	Flintglass 1. espèce.	Flintglass 2. espèce.	Flintglass 3. espèce. 1. série.	Flintglass 3. espèce. 2. série.	Flintglass 4. espèce.
θ_1	1,330935	1,330977	1,399629	1,470196	1,521312	1,525832	1,554774	1,602042	1,623570	1,626561	1,626596	1,627749
$\Delta^4\theta_1$	-8	-1	4	-5	13	-3	2	2	-4	1	16	-14
$\theta_1 - \Delta^4\theta_1$	1,330943	1,330981	1,399625	1,470501	1,524299	1,525835	1,554772	1,602040	1,623574	1,626563	1,626580	1,627763
θ_2	1,331712	1,331709	1,400515	1,471530	1,525299	1,526849	1,555933	1,603800	1,625477	1,628451	1,628469	1,629681
$\Delta^4\theta_2$	15	-3	-2	6	-10	-6	2	-8	15	3	7	-18
$\theta_2 - \Delta^4\theta_2$	1,331697	1,331712	1,400517	1,471524	1,525309	1,526855	1,555931	1,603808	1,625462	1,628148	1,628462	1,629699
θ_3	1,333577	1,333577	1,402805	1,474431	1,527982	1,529587	1,559075	1,608494	1,630585	1,633666	1,633667	1,635036
$\Delta^4\theta_3$	-2	5	0	-16	-1	19	-4	3	-22	2	6	11
$\theta_3 - \Delta^4\theta_3$	1,333579	1,333572	1,402805	1,474150	1,527983	1,529568	2,559079	1,608491	1,630607	1,633664	1,633664	1,635025
θ_4	1,335851	1,335849	1,405632	1,478353	1,531372	1,533005	1,563150	1,614532	1,637356	1,640544	1,640495	1,612021
$\Delta^4\theta_4$	-1	3	0	15	-2	-11	0	2	11	-6	-27	20
$\theta_4 - \Delta^4\theta_4$	1,335855	1,335846	1,405632	1,478338	1,531371	1,533016	1,563150	1,611530	1,637345	1,610530	1,640522	1,612001
θ_5	1,337818	1,337788	1,408082	1,481736	1,534337	1,536052	1,566711	1,620012	1,613466	1,646780	1,646756	1,648260
$\Delta^4\theta_5$	13	1	-3	-9	-11	13	-3	-4	-7	5	12	-7
$\theta_5 - \Delta^4\theta_5$	1,337805	1,337787	1,408085	1,481745	1,534348	1,536039	1,566714	1,620016	1,613473	1,646775	1,646744	1,648267
θ_6	1,311293	1,311261	1,412579	1,488198	1,539908	1,511657	1,573535	1,630772	1,653406	1,658849	1,658848	1,680285
$\Delta\theta_6$	-6	-9	5	11	11	-22	6	-2	18	-1	10	-24
$\theta_6 - \Delta^4\theta_6$	1,311299	1,311270	1,412574	1,188187	1,539894	1,511679	1,573529	1,630774	1,655388	1,658850	1,658838	1,660309
θ_7	1,344177	1,344162	1,416368	1,493874	1,511681	1,546566	1,579470	1,610373	1,666072	1,669680	1,669686	1,671062
$\Delta^4\theta_7$	-6	7	-1	-1	-3	8	-4	6	-11	-4	-22	31
$\theta_7 - \Delta^4\theta_7$	1,344183	1,344155	1,416369	1,493875	1,544687	1,546558	1,579474	1,610367	1,666083	1,669684	1,669708	1,671031

Si maintenant on remplace les deux valeurs d'une même quantité qui correspondent aux deux séries d'expériences faites sur l'eau ou la troisième espèce de flintglass par la moyenne arithmétique entre ces deux valeurs, on réduira le 13e tableau à celui que nous allons tracer.

XIV. TABLEAU.

Valeurs de $\theta_i - \Delta^4\theta_i$.

	Eau	Solution de potasse.	Huile de térébenthine.	Crownglass 1. espèce	Crownglass 2. espèce	Crownglass 3. espèce	Flintglass 1. espèce	Flintglass 2. espèce	Flintglass 3. espèce	Flintglass 4. espèce
θ_1	1,330956	1,399629	1,470496	1,524312	1,525832	1,554774	1,602042	1,623570	1,626580	1,627749
$\Delta^4\theta_1$	-6	4	-5	13	-3	2	2	-4	8	-14
$\theta_1 - \Delta^4\theta_1$	1,330962	1,399625	1,470501	1,524299	1,525835	1,554772	1,602040	2,623574	1,626572	1,627763
θ_2	1,331711	1,400515	1,471530	1,525299	1,526819	1,555933	4,603800	1,625177	1,628460	1,629681
$\Delta^4\theta_2$	6	-2	6	-10	-9	2	-8	15	5	-18
$\theta_2 - \Delta^4\theta_2$	1,331705	1,400517	1,471524	1,525309	1,526855	1,555931	1,603808	1,625162	1,628455	1,629699
θ_3	1,333577	1,402805	1,474434	1,527982	1,529587	1,559075	1,608494	1,630585	1,633667	1,635036
$\Delta^4\theta_3$	1	0	-16	-1	19	-4	3	-22	4	11
$\theta_3 - \Delta^4\theta_3$	1,333576	1,402805	1,474450	1,527983	1,529568	1,559079	1,608491	1,830607	1,633663	1,635025
θ_4	1,335850	1,405632	1,478353	1,531372	1,533005	1,563150	1,614532	1,637336	4,640520	1,642021
$\Delta^4\theta_4$	-1	0	15	-2	-11	0	2	11	-16	20
$\theta_4 - \Delta^4\theta_4$	1,335851	1,405632	1,478338	1,531374	1,533016	1,563150	1,614530	1,637315	1,640536	1,642001
θ_5	1,337803	1,408082	1,481736	1,534337	1,536052	1,566741	1,620042	1,613466	1,616768	1,648260
$\Delta^4\theta_5$	7	-3	-9	-11	13	-3	-4	-7	8	-7
$\theta_5 - \Delta^4\theta_5$	1,337796	1,408085	1,481715	1,534348	1,536039	1,566744	1,620046	1,643473	1,646760	1,618267
θ_6	1,341277	1,412579	1,488198	1,539908	1,541657	1,573535	1,630772	1,655106	1,658849	1,660285
$\Delta^4\theta_6$	-8	5	11	14	-22	6	-2	18	5	-24
$\theta_6 - \Delta^4\theta_6$	1,341283	1,412571	1,488187	1,539894	1,541678	1,573529	1,630774	1,655388	1,658844	1,660309
θ_7	1,344170	1,416368	1,493871	1,544684	1,546566	1,579470	1,640373	1,666072	1,669683	1,67106[illegible]
$\Delta^4\theta_7$	1	-1	-4	-3	8	-4	6	-11	-13	31
$\theta_7 - \Delta^4\theta_7$	1,344169	1,416369	1,493875	1,544687	1,546558	1,579474	1,640367	1,666083	1,669696	1,671031

En comparant les 12ᵉ et 13ᵉ tableaux aux tableaux analogues qui portent les numéros 22 et 24 dans le § 6, on reconnait que les changements apportés dans le § 7 aux formules à l'aide desquelles on détermine les valeurs corrigées de θ_i, font tres peu varier ces mêmes valeurs. Effectivement les différences entre les valeurs de $\Delta^4\theta_i$ que fournissent les tableaux 22 du § 6 et 12 du § 7, étant exprimées en millionièmes, seront telles que les offre le tableau suivant.

XV. TABLEAU.

Différences entre les valeurs de $\Delta^4\theta_i$ obtenues dans les § 6 et 7.

	Eau 1. série.	Eau 2. série.	Solution de potasse.	Huile de térébenthine.	Crownglass 1. espèce.	Crownglass 2. espèce.	Crownglass 3. espèce.	Flintglass 1. espèce.	Flintglass 2. espèce.	Flintglass 3. espèce. 1. série.	Flintglass 3. espèce. 2. série.	Flintglass 4. espèce.
pour $i = 1$	4	2	5	-6	-2	-1	-2	-4	-3	0	-4	12
2	3	1	2	-3	-1	-1	-1	-2	-1	0	-2	6
3	-3	-2	-3	4	1	1	0	3	2	0	2	-7
4	-1	-3	-1	5	2	1	2	5	3	1	3	-10
5	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	1	-1
6	6	5	7	-9	-2	-2	-2	-6	-5	-1	-6	17
7	-6	-4	-7	8	2	2	3	6	4	1	6	-17

Donc, parmi ces différences, celles qui se rapportent au cinquième rayon ou bien à la 3e espèce de flintglass (1re série), lorsqu'on les considere abstraction faite de leurs signes, ne surpassent pas un millionième; celles qui se rapportent aux trois espèces de crownglass ne surpassent pas trois millionièmes; et toutes généralement sont (abstraction faite de leurs signes) inférieures à 10 millionièmes, à l'exception toutefois de celles qui sont relatives à la 4e espèce de flintglass et dont les valeurs numériques s'élevent au plus à 12 ou 17 millionièmes. Au reste comme des deux systèmes de formules employées dans les § 6 et 7, le dernier seul à la propriété de réduire exactement les indices de réfraction à l'unité quand on remplace le milieu réfringent par l'air, il est clair que les valeurs de $\Delta^4\theta_i$ et de $\theta_i - \Delta^4\theta_i$ fournies par les tableaux 12, 13 et 14 du §. 7 méritent plus de confiance que les valeurs fornies pour les mêmes quantités par les tableaux 22, 24 et 25 du §. 6.

Si dans la formule (11) on pose pour abréger

$$(14)\quad \begin{cases} \mathfrak{U} = U' - \Theta, \\ \mathfrak{B} = U'' - \Theta - (U' - \Theta)\,S''\beta_i, \\ \mathfrak{W} = U''' - \Theta - (U' - \Theta)\,S'''\beta_i - [U'' - \Theta - (U' - \Theta)\,S''\beta_i]\,S'''\gamma_i, \end{cases}$$

on tirera de cette formule

$$(15)\qquad \Theta_i = \Delta^4\Theta_i = \Theta + \mathfrak{U}\beta_i + \mathfrak{B}\gamma_i + \mathfrak{W}\delta_i,$$

puis, en négligeant $\Delta^4\Theta_i$ qui est, comme on l'a vu, comparable aux erreurs d'observation, l'on trouvera

$$(16)\qquad \Theta_i = \Theta + \mathfrak{U}\beta_i + \mathfrak{B}\gamma_i + \mathfrak{W}\delta_i.$$

A l'aide de l'équation (16) jointe au 10e tableau, on déterminerait immédiatement, pour une substance quelconque, des valeurs de Θ_i très voisines de celles que fourniraient les observations, si l'on connaissait les valeurs des quatre coefficients Θ, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ relatives à la substance dont il s'agit. Ajoutons que ces coefficients pourraient se déduire, moyennant les formules (14) et (12), des valeurs supposées connues des quatre quantités

$$\Theta, \quad U, \quad U', \quad U'''.$$

Mais, comme on ne saurait obtenir directement, et sans recourir à l'expérience, les valeurs de ces quatre dernières quantités, ce qu'il y aura de mieux à faire sera de faire servir quatre valeurs particulières de Θ_i données par l'observation, par exemple, celles de

$$\Theta_1, \quad \Theta_3, \quad \Theta_5, \quad \Theta_7$$

à la détermination de Θ, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, ou, ce qui revient au même, à la détermination de la valeur générale de Θ_i. On y parviendra facilement, en opérant comme il suit.

Si dans l'équation (16) on pose successivement

$$i=1, \quad i=3, \quad i=5, \quad i=7,$$

cette équation donnera

$$(17) \quad \begin{cases} \Theta_1 = \Theta + \mathfrak{U}\beta_1 + \mathfrak{V}\gamma_1 + \mathfrak{W}\delta_1, \\ \Theta_3 = \Theta + \mathfrak{U}\beta_3 + \mathfrak{V}\gamma_3 + \mathfrak{W}\delta_3, \\ \Theta_5 = \Theta + \mathfrak{U}\beta_5 + \mathfrak{V}\gamma_5 + \mathfrak{W}\delta_5, \\ \Theta_7 = \Theta + \mathfrak{U}\beta_7 + \mathfrak{V}\gamma_7 + \mathfrak{W}\delta_7. \end{cases}$$

Or des formules (17), jointes au tableau 10, on pourra déduire les valeurs de

$$\Theta, \quad \mathfrak{U}, \quad \mathfrak{V}, \quad \mathfrak{W},$$

exprimées en fonctions linéaires de

$$\Theta_1, \quad \Theta_3, \quad \Theta_5, \quad \Theta_7.$$

Par suite la valeur générale de Θ_i, que détermine l'équation (16), deviendra elle-même une fonction linéaire de Θ_1, Θ_3, Θ_5, Θ_7. On arriverait encore aux mêmes conclusions de la manière suivante.

Si l'on combine, par voie de soustraction, la première des formules (17) avec la formule (16), on aura

$$\Theta_i - \Theta_1 = \mathfrak{U}(\beta_i - \beta_1) + \mathfrak{V}(\gamma_i - \gamma_1) + \mathfrak{W}(\delta_i - \delta_1),$$

puis, en divisant les deux membres par $\beta_i - \beta_1$, et posant pour abréger

$$(18) \qquad \gamma'_i = \frac{\gamma_i - \gamma_1}{\beta_i - \beta_1}, \qquad \delta'_i = \frac{\delta_i - \delta_1}{\beta_i - \beta_1},$$

en trouvera

$$\frac{\Theta_i - \Theta_1}{\beta_i - \beta_1} = \mathfrak{U} + \mathfrak{B}\,\gamma_i' + \mathfrak{W}\,\delta_i'. \tag{19}$$

Si l'on combine encore, par voie de soustraction, la formule (20) avec celle qu'on en déduit en posant $i = 3$, c'est à dire, avec l'équation

$$\frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\beta_3 - \beta_1} = \mathfrak{U} + \mathfrak{B}\,\gamma_3' + \mathfrak{W}\,\delta_3', \tag{20}$$

on aura

$$\frac{\Theta_i - \Theta_1}{\beta_i - \beta_1} - \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\beta_3 - \beta_1} = \mathfrak{B}\,(\gamma_i' - \gamma_3') + \mathfrak{W}\,(\delta_i' - \delta_3')\,;$$

puis, en divisant les deux membres par $\gamma_i' - \gamma_3'$, et faisant pour abréger

$$\delta_i'' = \frac{\delta_i' - \delta_3'}{\gamma_i' - \gamma_3'} \tag{21}$$

on trouvera

$$\frac{\dfrac{\Theta_i - \Theta_1}{\beta_i - \beta_1} - \dfrac{\Theta_3 - \Theta_1}{\beta_3 - \beta_1}}{\gamma_i' - \gamma_3'} = \mathfrak{B} + \mathfrak{W}\,\delta_i''. \tag{22}$$

Enfin, si l'on combine, par voie de soustraction, les formules (24) avec celle qu'on en déduit en posant $i = 5$, c'est à dire, avec l'équation

$$\frac{\dfrac{\Theta_5 - \Theta_1}{\beta_5 - \beta_1} - \dfrac{\Theta_3 - \Theta_1}{\beta_3 - \beta_1}}{\gamma_5' - \gamma_3'} = \mathfrak{B} + \mathfrak{W}\,\delta_5'', \tag{23}$$

on aura

$$\frac{\dfrac{\Theta_i - \Theta_1}{\beta_i - \beta_1} - \dfrac{\Theta_3 - \Theta_1}{\beta_3 - \beta_1}}{\gamma_i' - \gamma_3'} - \frac{\dfrac{\Theta_5 - \Theta_1}{\beta_5 - \beta_1} - \dfrac{\Theta_3 - \Theta_1}{\beta_3 - \beta_1}}{\gamma_5' - \gamma_3'} = \mathfrak{W}\,(\delta_i'' - \delta_5''),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\Theta_i - \Theta_1}{\beta_i - \beta_1} - \dfrac{\Theta_3 - \Theta_1}{\beta_3 - \beta_1}}{\gamma_i' - \gamma_3'} - \dfrac{\dfrac{\Theta_5 - \Theta_1}{\beta_5 - \beta_1} - \dfrac{\Theta_3 - \Theta_1}{\beta_3 - \beta_1}}{\gamma_5' - \gamma_3'}}{\delta_i'' - \delta_5''} = \mathfrak{W}\,; \tag{24}$$

et, comme, en prenant $i = 7$, on tirera de cette dernière équation

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\Theta_7 - \Theta_1}{\beta_7 - \beta_1} - \dfrac{\Theta_3 - \Theta_1}{\beta_3 - \beta_1}}{\gamma_7' - \gamma_3'} - \dfrac{\dfrac{\Theta_5 - \Theta_1}{\beta_5 - \beta_1} - \dfrac{\Theta_3 - \Theta_1}{\beta_3 - \beta_1}}{\gamma_5' - \gamma_3'}}{\delta_7'' - \delta_5''} = \mathfrak{W}, \tag{25}$$

l'élimination de 𝔅 entre les formules (24) et (25) donnera

$$(26)\quad \frac{\dfrac{\dfrac{\Theta_i-\Theta_1}{\beta_i-\beta_1}-\dfrac{\Theta_3-\Theta_1}{\beta_3-\beta_1}}{\gamma_i'-\gamma_3'}-\dfrac{\dfrac{\Theta_5-\Theta_1}{\beta_5-\beta_1}-\dfrac{\Theta_3-\Theta_1}{\beta_3-\beta_1}}{\gamma_5'-\gamma_3'}}{\delta_i''-\delta_5''}=\frac{\dfrac{\dfrac{\Theta_7-\Theta_1}{\beta_7-\beta_1}-\dfrac{\Theta_3-\Theta_1}{\beta_3-\beta_1}}{\gamma_7'-\gamma_3'}-\dfrac{\dfrac{\Theta_5-\Theta_1}{\beta_5-\beta_1}-\dfrac{\Theta_3-\Theta_1}{\beta_3-\beta_1}}{\gamma_5'-\gamma_3'}}{\delta_7''-\delta_5''}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(27)\quad \Theta_i=\Theta_1+\frac{\beta_i-\beta_1}{\beta_3-\beta_1}(\Theta_3-\Theta_1)+\frac{\beta_i-\beta_1}{\beta_5-\beta_1}\frac{\gamma_i'-\gamma_3'}{\gamma_5'-\gamma_3'}\left\{\Theta_5-\Theta_1-\frac{\beta_5-\beta_1}{\beta_3-\beta_1}(\Theta_3-\Theta_1)\right\}$$

$$+\frac{\beta_i-\beta_1}{\beta_7-\beta_1}\frac{\gamma_i'-\gamma_3'}{\gamma_7'-\gamma_3'}\frac{\delta_i''-\delta_5''}{\delta_7''-\delta_5''}\left\{\Theta_7-\Theta_1-\frac{\beta_7-\beta_1}{\beta_3-\beta_1}(\Theta_3-\Theta_1)-\frac{\beta_7-\beta_1}{\beta_5-\beta_1}\frac{\gamma_7'-\gamma_3'}{\gamma_5'-\gamma_3'}\left[\Theta_5-\Theta_1-\frac{\beta_5-\beta_1}{\beta_3-\beta_1}(\Theta_3-\Theta_1)\right]\right\}.$$

Afin de montrer l'utilité de la formule (27), supposons que pour une substance quelconque on ait déduit de l' expérience les valeurs de Θ_i représentées par

$$\Theta_1,\quad \Theta_3,\quad \Theta_5,\quad \Theta_7$$

et correspondantes aux rayons *B*, *D*, *F*, *H* de Frauenhofer. Pour tirer de la formule (27) les valeurs de Θ_i correspondantes aux rayons

C, *E*, *G*,

il suffira d' y poser successivement

$$i=2,\quad i=4,\quad i=7.$$

D'ailleurs les formules (18) et (21) jointes au 10e tableau fourniront les valeurs de γ_i', δ_i', δ_i'' comprises dans celui que nous allons tracer.

XVI. TABLEAU.

Détermination des valeurs de γ_i', δ_i' et δ_i''.

i	1	2	3	4	5	6	7	Sommes.
β_i	0,190836	0,168772	0,109002	0,031390	-0,038191	-0,171628	-0,290181	0
β_1	0,190836	0,190836	0,190836	0,190836	0,190836	0,190836	0,190836	1,335852
$\beta_i-\beta_1$	0	-0,022061	-0,081831	0,159416	0,229027	-0,362161	-0,184017	-1,335852
γ_i	-0,16123	-0,08707	0,06720	0,18108	0,20259	0,04608	-0,21876	-0,00011
γ_1	-0,16123	-0,16123	-0,16123	-0,16123	-0,16123	-0,16123	-0,16123	-1,14961
$\gamma_i-\gamma_1$	0	0,07716	0,23113	0,34831	0,36682	0,21031	-0,08453	1,14950
δ_i	-0,2357	0,1091	0,2135	-0,1462	-0,1476	0,0207	9,1269	-0,0010
δ_1	-0,2357	-0,2357	-0,2357	-0,2357	-0,2357	-0,2357	-0,2357	-1,6192
$\delta_i-\delta_1$	0	0,3451	0,1792	0,1195	0,0879	0,2561	0,3626	1,6502
$L(\pm(\gamma_i-\gamma_1))$		8873922	3644197	5119659	5641530	3228399	9270109	
$L(-(\beta_i-\beta_1))$		3136812	9129338	2026137	3598867	5592619	6821605	
$L(+\gamma_i')$		5137080	1514859	3393522	2015663	7635950	2118504	
γ_i'		-3,1971	-2,8280	-2,1815	-1,6016	0,5802	0,1757	-10,5157
γ_3'		-2,8280	-2,8280	-2,8280	-2,8280	-2,8280	-2,8280	-16,9680
$\gamma_i'-\gamma_3'$		-0,6691	0	0,6435	1,2264	2,2178	3,0037	6,1523
$L(\delta_i-\delta_1)$		5379150	6805168	0773679	9439889	1089180	5594278	
$L(-(\beta_i-\beta_1))$		3136812	9129338	2026137	3598867	5592619	6821605	
$L(-\delta_i')$		1942608	7675830	8747512	5811022	8196534	8772673	
δ_i'		-15,6409	-5,8558	-0,7195	-0,3838	-0,7074	-0,7538	21,091 2
δ_3'		-5,8558	-5,8558	-5,8558	-5,3558	-5,8558	-5,8558	-35,131 8
$\delta_i'-\delta_3'$		-9,7851	0	5,1063	5,1720	5,1484	5,1020	11,0436
$L(\pm(\delta_i'-\delta_3'))$		9905653		7084063	7381161	7146723	7077105	
$L(\pm(\gamma_i'-\gamma_3'))$		8254910		8085486	0886324	3517577	1776566	
$L(\delta_i'')$		1650743		8995376	6195110	3599146	2300839	
δ_i''		11,6243		7,9352	1,4618	2,2901	1,6986	31,0103
δ_5''		1,4618		4,1618	1,4618	4,4618	4,1618	22,3090
$\delta_i''-\delta_5''$		10,1625		3,1731	0	-2,1711	-2,7632	8,7013
$L(\pm(\delta_i''-\delta_5''))$		0070006		5407518		3367398	1111123	

Il y aplus : si l'on pose, pour abréger,

(28) $B_i=\frac{\beta_i-\beta_1}{\beta_2-\beta_1}$, $C_i=\frac{(\beta_i-\beta_1)(\gamma_i'-\gamma_3')}{(\beta_2-\beta_1)(\gamma_2'-\gamma_3')}$, $D_i=\frac{(\beta_i-\beta_1)(\gamma_i'-\gamma_3')(\delta_i''-\delta_5'')}{(\beta_7-\beta_1)(\gamma_7'-\gamma_3')(\delta_7''-\delta_5'')}$,

la formule (27) sera rduite à

(29) $\Theta_i=\Theta_1+B_i(\Theta_2-\Theta_1)+C_i[\Theta_3-\Theta_1-B_3(\Theta_2-\Theta_1)]+D_i\{\Theta_7-\Theta_1-B_7(\Theta_2-\Theta_1)-C_7[\Theta_3-\Theta_1-B_3(\Theta_2-\Theta_1)]\}$.

Or les logarithmes des rapports B_i, C_i, D_i et par suite ces rapports eux mêmes se calculeront aisément à l'aide du tableau 16, et offriront les valeurs comprises dans le tableau suivant.

XVII. TABLEAU.

Valeurs de B_i, C_i, D_i.

i	1	2	3	4	5	6	7
$L(-(\beta_i-\beta_1))$ $L(\mp(\gamma_i'-\gamma_3'))$		3136812 8254910	9129338	2026137 8085186	3598867 0886321	5592619 3517577	6821605 4776566
Somme $L(\pm(\delta_i''-\delta_5''))$		1691752 0070006		0111623 3107518	4185188	9110226 3367398	1598171 4111123
Somme		1761758 6012291		3519171 6012291		2177621 6012291	6012291
$L(\pm D_i)$		5749161		9506877		6465330	
D_i	0	0,03759	0	-0,08927	0	0,14313	1
$L(\pm(\beta_i-\beta_1)(\gamma'_i-\gamma'_3))$ $L(-(\beta_5-\beta_1)(\gamma'_5-\gamma'_3))$		1691752 4185188		0111623 4185188	4185188	9110226 4185188	1598171 4185188
$L(\mp C_i)$		7206561		5626135		1625038	7112983
C_i	0	-0,05256	0	0,36530	1	2,90072	5,14397
$L(-(\beta_i-\beta_1))$ $L(-(\beta_3-\beta_1))$		3136842 9129338	9129338	2026137 9129338	3598867 9129338	5592619 9129338	6821605 9129338
$L(B_i)$		4307504		2896799	4469529	6463311	7692267
B_i	0	0,26963	1	1,94811	2,79868	4,42926	5,87796

Pour montrer une application de la formule (29), concevons que l'on y substitue les valeurs de Θ_1, Θ_3, Θ_5, Θ_7 tirées du 8e tableau [§ 6] et relatives à la solution de potasse. On aura

(30) $\quad \Theta_1 = 1{,}958961, \quad \Theta_3 = 1{,}967862, \quad \Theta_5 = 1{,}982695, \quad \Theta_7 = 2{,}006099;$

et l'on en conclurra

(31) $\Theta_3 - \Theta_1 = 0{,}008901\,,\quad \Theta_5 - \Theta_1 = 0{,}023734\,,\quad \Theta_7 - \Theta_1 = 0{,}047138\,,$

puis, en ayant égard au 15ᵉ tableau,

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &\Theta_5-\Theta_1-B_5(\Theta_3-\Theta_1)=0{,}023734-0{,}024911=-0{,}001177\,,\\ &\Theta_7-\Theta_1-B_7(\Theta_3-\Theta_1)=0{,}047138-0{,}052320=-0{,}005182\,,\\ &\Theta_7-\Theta_1-B_7(\Theta_3-\Theta_1)-C_7[\Theta_5-\Theta_1-B_5(\Theta_3-\Theta_1)]=-0{,}005182+0{,}006054\\ &\qquad =0{,}000872. \end{aligned}\right.$$

Par suite la formule (29) deviendra

$$(33)\qquad \Theta_i = 1{,}958961 + 0{,}008901\, B_i - 0{,}001177\, C_i + 0{,}000872\, D_i.$$

Si dans cette dernière on pose successivement

$$i=2,\quad i=4,\quad i=6$$

les valeurs correspondantes de Θ_i, calculées à l'aide du 17ᵉ tableau seront celles que presente le tableau suivant.

XVIII. TABLEAU.

Valeurs de Θ_2, Θ_4, Θ_6 déduites des valeurs de Θ_1, Θ_3, Θ_5, Θ_7, et relatives à la solution de potasse.

i	2	4	6
$L(\pm D_i)$ $L(872)$	5719161 9405165	9506877 9405165	6465330 9405165
Somme	5151629	8912012	5870195
$0{,}000872\, D_i$	0,000033	-0,000078	0,000386
$L(+C_i)$ $L(1177)$	7206564 0707765	5626435 0707765	4625038 0707765
Somme	7914329	6331200	5332803
$-0{,}001177\, C_i$	0,000062	-0,000430	-0,003114
$L(B_i)$ $L(8901)$	4307501 9194388	2896799 9494388	6163311 9194388
Somme	3801892	2391187	5957699
$0{,}008901\, B_i$	0,002400	0,017343	0,039125
Θ_1 $0{,}008901\, B_i$ $-0{,}001177\, C_i$ $0{,}000872\, D_i$	1,958961 2400 62 33	1,958961 17343 -430 -78	1,958961 39125 -3114 386
Θ_i	1,961456	1,975796	1,995858

Ainsi, pour la solution de potasse, lorsqu'on fait servir les valeurs de

$$\Theta_1,\quad \Theta_3,\quad \Theta_5,\quad \Theta_7$$

fournies par l'expérience à la détermination des valeurs de

$$\Theta_2,\quad \Theta_4,\quad \Theta_6$$

on trouve

$$(34)\qquad \Theta_2 = 1{,}961456,\quad \Theta_4 = 1{,}975796,\quad \Theta_6 = 1{,}995358.$$

D'ailleurs les valeurs de Θ_2, Θ_4, Θ_6 fournies par les expériences de Frauenhofer sont respectivement [voyez le 8e tableau, § 6]

$$(35)\qquad \Theta_2 = 1{,}961442,\quad \Theta_4 = 1{,}975801,\quad \Theta_6 = 1{,}995381.$$

Les différences entre ces dernières valeurs et les précédentes, savoir,

$$(36)\qquad -0{,}000014,\quad -0{,}000005,\quad -0{,}000023,$$

sont comparables et même notablement inférieures, comme le prouve le 7e tableau du § 6, aux plus grandes erreurs que comportent les observations.

Si, dans la formule (29), on pose pour abréger

$$(37)\qquad \begin{cases} E_i = C_i - C_7 D_i, \\ F_i = B_i - B_7 D_i - B_5 (C_i - C_7 D_i) = B_i - B_7 D_i - B_5 E_i, \end{cases}$$

cette formule donnera

$$(38)\qquad \Theta_i = D_i(\Theta_7 - \Theta_1) + E_i(\Theta_5 - \Theta_1) + F_i(\Theta_3 - \Theta_1) + \Theta_1,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(39)\qquad \Theta_i = (1 - D_i - E_i - F_i)\,\Theta_1 + F_i\Theta_3 + E_i\Theta_5 + D_i\Theta_7.$$

D'ailleurs des formules (37) jointes au 17e tableau on déduira facilement les valeurs suivantes des coefficients que renferment les formules (38) et (39).

XIX. TABLEAU.

Valeurs de D_i, E_i, F_i.

i	2	4	6
D_i	0,03759	-0,08927	0,44313
$L(\pm D_i)$ $L(C_7)$	5719464 7112983	9506877 7112983	6465330 7112983
$L(\pm C_7 D_i)$	2862417	6619860	3578313
C_i $-C_7 D_i$	-0,05256 -0,19331	0,36530 0,15918	2,90072 -2,27946
E_i	-0,24587	0,82448	0,62126
$L(\mp E_i)$ $L(B_5)$	3907055 4469529	9161801 4469529	7932734 4469529
$L(\mp B_5 E_i)$	8376584	3631330	2402263
$L(\pm D_i)$ $L(B_7)$	5749164 7692267	9506877 7692267	6465330 7692267
$L(\pm B_7 D_i)$	3441731	7199144	4157597
B_i $-B_7 D_i$ $-B_5 E_i$	0,26963 -0,22089 0,68811	1,94841 0,52470 -2,30745	4,42926 -2,60471 -1,73871
F_i	0,73685	0,16566	0,08584
$L(F_i)$	8673791	2192177	9336897
1 $-D_i$ $-E_i$ $-F_i$	1,00000 -0,03759 0,24587 -0,73685	1,00000 0,08927 -0,82448 -0,16566	1,00000 -0,44313 -0,62126 -0,08584
$1-D_i-E_i-F_i$	0,47143	0,09913	-0,15023
$L(\pm(1-D_i-E_i-F_i))$	6734172	9962051	1767567

En conséquence, on tirera de la formule (38)

$$
(40)\left\{\begin{aligned}
\Theta_2 &= \Theta_1 + 0{,}73685(\Theta_3 - \Theta_1) - 0{,}24587(\Theta_5 - \Theta_1) + 0{,}03759(\Theta_7 - \Theta_1),\\
\Theta_4 &= \Theta_1 + 0{,}16566(\Theta_3 - \Theta_1) + 0{,}82448(\Theta_5 - \Theta_1) - 0{,}08927(\Theta_7 - \Theta_1),\\
\Theta_6 &= \Theta_1 + 0{,}08584(\Theta_3 - \Theta_1) + 0{,}62126(\Theta_5 - \Theta_1) + 0{,}44313(\Theta_7 - \Theta_1),
\end{aligned}\right.
$$

et de la formule (39)

$$
(41)\left\{\begin{aligned}
\Theta_2 &= 0{,}47143\,\Theta_1 + 0{,}73685\,\Theta_3 - 0{,}24587\,\Theta_5 + 0{,}03759\,\Theta_7,\\
\Theta_4 &= 0{,}09913\,\Theta_1 + 0{,}16566\,\Theta_3 + 0{,}82448\,\Theta_5 - 0{,}08927\,\Theta_7,\\
\Theta_6 &= -0{,}15023\,\Theta_1 + 0{,}08584\,\Theta_3 + 0{,}62126\,\Theta_5 + 0{,}44313\,\Theta_7.
\end{aligned}\right.
$$

Les formules (40) ou (41), appliquées a une substance quelconque, donneront pour cette substance les valeurs de

$$\Theta_2,\ \Theta_4,\ \Theta_6$$

quand on aura déduit de l'expérience celles de

$$\Theta_1,\ \Theta_3,\ \Theta_5,\ \Theta_7.$$

Pour montrer un exemple de cette application, considérons de nouveau la solution de potasse. Alors les valeurs des quantités Θ_1, Θ_3, Θ_5, Θ_7 et de leurs différences successives seront fournies par les équations (30), (31), et la substitution de ces valeurs dans les formules (40) ou, ce qui revient au même, dans la formule (38), donnera naissance au tableau suivant.

XX. TABLEAU.

Valeurs de Θ_2, Θ_4, Θ_6 déduites de la formule (40) et relatives à la solution de potasse.

i	2	3	4
$L(F_i)$ $L(\Theta_3-\Theta_1)$	8673791 9491388	2192177 9491388	9336897 9491388
$L[(\Theta_3-\Theta_1)F_i]$	8168179	1680563	8831285
$L(\mp E_i)$ $L(\Theta_5-\Theta_1)$	3907055 3753709	9164801 3753709	7932731 3753709
$L(\mp(\Theta_5-\Theta_1)E_i)$	7660761	2915510	1686113
$L(\pm D_i)$ $L(\Theta_7-\Theta_1)$	5719461 6733712	9506877 6733712	6165330 6733712
$L(\pm(\Theta_7-\Theta_1)D_i)$	2453179	6240589	3199042
Θ_1 $F_i(\Theta_3-\Theta_1)$ $E_i(\Theta_5-\Theta_1)$ $D_i(\Theta_7-\Theta_1)$	1,958961 6559 - 5835 1771	1,958961 1475 19568 - 4208	1,958961 761 14713 20888
Θ_i	1,961456	1,975796	1,995358

Or ce tableau, comme on devait s'y attendre, reproduit precisément les valeurs de Θ_2, Θ_4, Θ_6 ci-dessus déduites de la formule (29) et déterminées par les formules (34).

On pourrait faire servir les valeurs de $\Delta'\Theta_i$ données par le 7e tableau, à la détermination des valeurs corrigées de Θ_i que fournirait la formule (40) ou (41) appliquée successivement aux diverses substances. Observons en effet que ces formules comprises elles mêmes dans l'équation (38) ou (39), sont déduites d'une équation qui ne subsiste qu'approximativement, savoir de l'équation (16), qui devient rigoureuse, et se transforme en l'équation (15), lorsqu'on y remplace Θ_i par

$$\Theta_i - \Delta'\Theta_i$$

en substituant à Θ_i la valeur observée. Il en résulte qu'à leur tour les équations (38) et (39) deviendront rigoureuses, si l'on y remplace

$$\Theta_1, \quad \Theta_3, \quad \Theta_5, \quad \Theta_7, \quad \Theta_i$$

par

$$\Theta_1 - \Delta'\Theta_1, \quad \Theta_3 - \Delta'\Theta_3, \quad \Theta_5 - \Delta'\Theta_5, \quad \Theta_7 - \Delta'\Theta_7, \quad \Theta_i - \Delta'\Theta_i.$$

Ainsi, par exemple, les valeurs observées de

$$\Theta_1, \quad \Theta_3, \quad \Theta_5, \quad \Theta_7, \quad \Theta_i$$

vérifient en toute rigueur l'équation

$$(42) \quad \Theta_i - \Delta'\Theta_i = (1-D_i-E_i-F_i)(\Theta_1-\Delta'\Theta_1) + F_i(\Theta_3-\Delta'\Theta_3) + E_i(\Theta_5-\Delta'\Theta_5) + D_i(\Theta_7-\Delta'\Theta_7).$$

Or on tire de cette dernière formule

$$(43) \left\{ \begin{array}{l} (1-D_i-E_i-F_i)\Theta_1 + F_i\Theta_3 + E_i\Theta_5 + D_i\Theta_7 = \Theta_i - \Delta'\Theta_i \\ + (1-D_i-E_i-F_i)\Delta'\Theta_1 + F_i\Delta'\Theta_3 + E_i\Delta'\Theta_5 + D_i\Delta'\Theta_7. \end{array} \right.$$

Donc le second membre de l'équation (39), ou la valeur corrigée de Θ_i fournie par cette même équation, est la somme des deux quantités

$$\Theta_i - \Delta'\Theta_i$$

et

$$(44) \qquad (1-D_i-E_i-F_i)\Delta'\Theta_1 + E_i\Delta'\Theta_3 + F_i\Delta'\Theta_5 + D_i\Delta'\Theta_7$$

dont la premiere se trouve, pour chaque substance et pour chaque rayon, immédiatement donnée par le 8e tableau, tandisque la seconde peut être facilement déduite des valeurs obtenues pour

$$\Delta'\Theta_1, \quad \Delta'\Theta_3, \quad \Delta'\Theta_5, \quad \Delta'\Theta_7:$$

Si dans l'expression (44) on pose successivement

$$i = 2, \quad i = 4, \quad i = 6,$$

cette expression acquierra, eu égard au 19[e] tableau, les formes suivantes :

$$(45)\quad \left\{\begin{array}{l} 0{,}47143\,\Delta^4\Theta_1 + 0{,}73865\,\Delta^4\Theta_3 - 0{,}24587\,\Delta^4\Theta_5 + 0{,}03759\,\Delta^4\Theta_7, \\ 0{,}09913\,\Delta^4\Theta_1 + 0{,}16566\,\Delta^4\Theta_3 + 0{,}82448\,\Delta^4\Theta_5 - 0{,}08927\,\Delta^4\Theta_7, \\ -0{,}15023\,\Delta^4\Theta_1 + 0{,}08584\,\Delta^4\Theta_3 + 0{,}62126\,\Delta^4\Theta_5 + 0{,}44313\,\Delta^4\Theta_7. \end{array}\right.$$

Comme des valeurs numériques de $\Delta^4\Theta_i$, exprimées en millionièmes, et fournies par le 7[e] tableau, la plus grande 103 est seule composée de trois chiffres, chacune des autres renferment deux chiffres au plus, il est clair que, dans l'évaluation en nombres des polynomes (45) on pourra, sans erreur sensible, réduire chaque coefficient à se deux premiers chiffres decimaux, et par suite ces polynomes eux mêmes aux trois suivants :

$$(46)\quad \left\{\begin{array}{l} 0{,}47\,\Delta^4\Theta_1 + 0{,}74\,\Delta^4\Theta_3 - 0{,}25\,\Delta^4\Theta_5 + 0{,}04\,\Delta^4\Theta_7, \\ 0{,}10\,\Delta^4\Theta_1 + 0{,}17\,\Delta^4\Theta_3 + 0{,}82\,\Delta^4\Theta_5 - 0{,}09\,\Delta^4\Theta_7, \\ -0{,}15\,\Delta^4\Theta_1 + 0{,}09\,\Delta^4\Theta_3 + 0{,}62\,\Delta^4\Theta_5 + 0{,}44\,\Delta^4\Theta_7. \end{array}\right.$$

En substituant dans ces derniers polynomes les valeurs de $\Delta^4\Theta_1$, $\Delta^4\Theta_3$, $\Delta^4\Theta_5$, $\Delta^4\Theta_7$ tirées du 7[e] tableau, et retranchant des résultats ainsi calculés les valeurs de $\Delta^4\Theta_i$ on obtiendra les corrections que doivent subir les valeurs de Θ_i fournies par l'expérience pour se transformer en celles que donneraient les formules (39). Les corrections dont il s'agit se trouvent déterminées, pour chacun des trois rayons *C, F, G* de Frauenhofer, dans le tableau que nous allons tracer.

XXI. TABLEAU.

Corrections de Θ_2, Θ_4, Θ_6 exprimées en millionièmes.

	Eau		Solution de potasse.	Huile de térébenthine.	Crownglass			Flintglass					Sommes.
	1. série.	2. série.			1. espèce.	2. espèce.	3. espèce.	1. espèce.	2. espèce.	3. espèce. 1. série.	3. espèce. 2. série.	4. espèce.	
$\Delta'\Theta_1$	-22	-11	12	-14	39	-9	6	6	-13	2	51	-11	0
$\Delta'\Theta_3$	-6	13	-1	-17	-3	59	-11	11	-71	6	19	37	1
$\Delta'\Theta_5$	36	3	-9	-28	-35	40	-8	-14	-22	16	11	-22	-2
$\Delta'\Theta_7$	-17	20	-3	-4	-9	26	-13	19	-36	-15	-72	103	-1
$0{,}47\ \Delta'\Theta_1$	-10	-5	6	-7	18	-1	3	3	-6	1	21	-21	2
$0{,}74\ \Delta'\Theta_3$	-1	10	-1	-35	-2	11	-10	8	-52	1	11	27	3
$-0{,}25\ \Delta'\Theta_5$	-9	-1	2	7	9	-10	2	3	5	-1	-10	5	-1
$0{,}04\ \Delta'\Theta_7$	-1	1	0	0	0	1	0	1	-1	-1	-3	1	1
Somme	-21	5	7	-35	25	31	-5	15	-51	0	25	15	5
$\Delta'\Theta_2$	11	-9	-7	18	-31	-19	6	-25	19	11	22	-59	-3
Correction de Θ_2	-65	14	14	-53	56	50	-11	40	-103	-11	3	71	3
$0{,}10\ \Delta'\Theta_1$	-2	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	0	5	-1	2
$0{,}17\ \Delta'\Theta_3$	-1	2	0	-8	0	10	-2	-2	-12	1	3	6	1
$0{,}82\ \Delta'\Theta_5$	30	2	-7	-23	-29	33	-7	-12	-18	13	34	-18	-2
$-0{,}09\ \Delta'\Theta_7$	2	-2	0	0	1	-2	1	-2	3	1	6	-9	-1
Somme	29	1	-6	-32	-21	10	-7	-11	-28	13	18	-25	0
$\Delta'\Theta_4$	-12	7	-1	43	-5	-33	1	8	35	-20	-90	66	-1
Correction de Θ_4	11	-6	-5	-75	-19	73	-8	-19	-63	35	138	-91	1
$-0{,}15\ \Delta'\Theta_1$	3	2	-2	2	-6	1	-1	-1	2	0	-8	7	-1
$0{,}09\ \Delta'\Theta_3$	-1	1	0	-1	0	3	-1	1	-6	1	2	3	1
$0{,}62\ \Delta'\Theta_5$	22	2	-6	-17	-22	25	-5	-9	-11	10	25	-11	-3
$0{,}11\ \Delta'\Theta_7$	-8	9	-1	-2	-1	12	-6	-8	-16	-7	-32	16	-1
Somme	16	11	-9	-21	-32	43	-13	-1	-31	1	-13	12	-4
$\Delta'\Theta_6$	-17	-23	13	34	42	-68	20	-5	58	-4	32	-80	2
Correction de Θ_6	33	37	-22	-55	-71	111	-33	4	-92	8	-45	122	-6

Pour atteindre une plus grande exactitude, nous avons, dans les multiplications, remplacé les valeurs approchées des coefficients de $\Delta'\Theta_1$, $\Delta'\Theta_3$.... c'est à dire les nombres

$$0{,}47;\quad 0{,}74;\ldots.$$

écrits à la marge du 21e tableau, par les nombres

$$0,47143; \quad 0,73865; \ldots.$$

c'est à dire, par les valeurs des mêmes coefficients prises dans les expressions (45), toutes les fois que la réduction de l'un ces coefficients à sa valeur approchée pouvait augmenter ou diminuer d'une unité le dernier chiffre du produit. La dernière colonne verticale du 21e tableau, composée de sommes qui se déduisent les unes des autres, et dont chacune, comme on devait s'y attendre, diffère très peu de zéro, sert à confirmer la justesse de nos calculs.

Si l'on fait subir les corrections indiquées par le tableau 21, aux valeurs de

$$\Theta_2, \quad \Theta_4, \quad \Theta_6$$

déduites de l'expérience, on obtiendra celles que déterminerait la formule (39) et que présente le tableau suivant.

XXII. TABLEAU.

Valeurs corrigées de Θ_2, Θ_4, Θ_6, en vertu de la formule (39).

	Eau		Solution de potasse.	Huile de térébenthine.	Crownglass			Flintglass					Sommes.
	1. série.	2. série.			1. espèce.	2. espèce.	3. espèce.	1. espèce.	2. espèce.	3. espèce. 1. série.	3. espèce. 2. série.	4. espèce.	
Θ_2	1,773457	1,773119	1,961112	2,165102	2,326538	2,331269	2,120927	2,572175	2,612177	2,651831	2,551912	2,655861	27,926463
Correction	- 65	11	11	- 53	56	50	- 11	40	- 103	- 11	3	74	8
val. corrigés	1,773392	1,773163	1,961156	2,165319	2,326591	2,331319	2,420916	2,572215	2,612074	2,651843	2,651915	2,655935	27,926471
Θ_4	1,781497	1,781192	1,975801	2,185528	1,315101	2,350105	2,113138	2,606712	2,680936	2,691381	2,691225	2,696244	28,235463
Correction	41	- 6	- 5	- 75	- 19	73	- 8	- 19	- 63	35	138	- 91	1
val. corrigée	1,784538	1,781186	1,975796	2,185153	2,315082	2,350178	2,113130	2,606693	2,680873	2,691419	2,691363	2,606153	28,235461
Θ_6	1,799068	1,798981	1,695381	2,211731	2,871317	2,376707	2,176012	2,659118	2,710370	2,751781	2,751776	2,756547	28,692092
Correction	33	37	- 22	- 55	- 71	111	- 33	- 4	- 92	8	- 45	122	- 6
val. corrigée	1,799101	1,799018	1,995359	2,214679	2,371213	2,376818	2,475979	2,659122	2,740278	2,751789	2,751731	2,756669	28,692086

La dernière colonne verticale du 22[e] tableau, composée de sommes qui se déduisent les unes des autres, sert à confirmer la justesse de nos calculs.

Les valeurs corrigées de Θ_2, Θ_4, Θ_6, que fournit le 20[e] tableau, étant déduites chacune des valeurs de Θ_i correspondantes à quatre rayons différents, savoir aux rayons *B, D, F, H* de Frauenhofer, méritent plus de confiance que les valeurs de Θ_2, Θ_4, Θ_6 directement fournies par l'expérience, puisque chacune de ces dernières est tirée d'une seule observation.

Mais on doit avoir plus de confiance encore dans les valeurs corrigées de Θ_2, Θ_4, Θ_6 que présente le 8e tableau, et qui s'y trouvent représentées par

$$\Theta_2 - \Delta'\Theta_2, \quad \Theta_4 - \Delta'\Theta_4, \quad \Theta_6 - \Delta'\Theta_6,$$

puisqu' à la détermination de chacune d'elles concourent les observations faites non plus seulement sur quatre rayons, mais sur les sept rayons *B, C, D, E, F, G, H*. Cette conclusion se trouve d'accord avec la remarque facile à faire que les corrections de Θ_2, Θ_4, Θ_6 déterminées dans le 21e tableau, offrent en général des valeurs numériques supérieures aux valeurs numériques correspondantes des quantités $\Delta'\Theta_2$, $\Delta'\Theta_4$, $\Delta'\Theta_6$ qui représentent au signe près dans le 8e tableau les corrections de Θ_2, Θ_4, Θ_6. Effectivement, dans le 21e tableau, la correction de Θ_2, par exemple, est, pour toutes les substances, excepté pour la 3e espèce de flintglass, la différence qu'on obtient quand on retranche la quantité $\Delta'\Theta_2$ d'une autre quantité affectée d'un signe contraire, ensorte que les valeurs numériques de ces deux quantités s'ajoutent pour former celle de la correction de Θ_2. Au reste les plus grandes des valeurs numériques des corrections de Θ_2, Θ_4, Θ_6 exprimées en millionièmes dans le 21e tableau, ou les quantités

0,000122 ; 0,000138

sont encore inférieures au nombre

0,000159

qui représente la plus grande des valeurs numériques des variations de Θ_i comprises dans la 7e ligne horizontale du 7e tableau du § 6, et par conséquent se trouvent renfermées entre les limites que comportent les erreurs d'observation.

---

§. 8. *Remarques sur les résultats obtenus dans les paragraphes précédents.*

En établissant les formules à l'aide desquelles ont été calculés les nombres que renferment les divers tableaux des deux derniers paragraphes, et spécialement le 8e tableau du § 7, nous avons supposé que, dans chaque substance, l'élasticité de l'éther restait la même en tous sens, et qu'en conséquence les milieux traversés par la lumière étaient du nombre de ceux qui offrent les phénomènes de la réfraction simple. Dans cette supposition, les quatre quantités dont se composent les valeurs corrigées de Θ_i, c'est à dire, les quantités désignées dans le 8e tableau du § 7, par

(1) $$\Theta, \quad \vartheta_i', \quad \vartheta_i'', \quad \vartheta_i''',$$

doivent, comme on l'a dit, former généralement, abstraction faite de leurs signes, une suite décroissante. Mais nos formules pourraient cesser d'être rigoureusement applicables, si l'une des substances possédait, même à un faible dégré, la propriété de faire subir aux rayons lumineux une réfraction double, et alors la condition ci-dessus énoncée, savoir que les valeurs numériques des quantités (1) forment une suite décroissante, pourrait cesser d'être vérifiée, sur tout pour la substance dont il s'agit.

Or, dans le 8[e] tableau du § 7, la seule substance pour laquelle la condition énoncée ne soit pas toujours remplie est l'huile de térébenthine. Donc l'inspection de ce tableau nous conduit à penser que, si l'une des substances employées par Frauenhofer produit à une faible dégré la double refraction, ce doit être l'huile de térébenthine. Effectivement M. Biot a reconnu que le plan de polarisation d'un rayon lumineux, c'est à dire, le plan mené par le rayon et dans lequel se déplacent les molecules d'éther, change plus ou moins de direction, lorsqu'il a traversé une couche plus ou moins épaisse d'huile de térébenthine ; et cette observation. Comme nous le verrons plus tard, prouve que l'huile de térébenthine possède, quoiqu' à un faible dégré, la propriété d'être doublement réfringente. Si, en raison de cette circonstance, on exclut l'huile de térébenthine des calculs relatifs à la détermination des valeurs corrigées de Θ_i, alors, à la place des tableaux 2 et suivants du § 7, on obtiendra ceux que nous allons former.

Dabord, si des sommes représentées dans le 2[e] tableau [§ 7] par

$$\Sigma'\Delta\Theta_i \quad \text{et} \quad \Sigma'S'\Delta\Theta_i$$

on retranche les valeurs de

$$\Delta\Theta_i \quad \text{et} \quad S'\Delta\Theta_i$$

relatives à l'huile de térébenthine, on obtiendra pour ces mêmes sommes et pour β_i de nouvelles valeurs qui seront fournies par le tableau suivant.

I. TABLEAU.

Valeurs de β_i.

i	1	2	3	4	5	6	7	$\Sigma'S'\Delta'\Theta_i$
$\Sigma'\Delta\Theta_i$	0,401707	0,355122	0,229239	0,066218	-0,080239	-0,361175	-0,610898	2,101628
$L(\pm\Sigma'\Delta\Theta_i)$ $L(\Sigma S\Delta\Theta_i)$	6039091 3231751	5503775 3231751	3602886 3231751	8211728 3231754	9013855 3231754	5577177 3231754	7859688 3231754	
$L(\pm\beta_i)$	2807340	2272021	0371132	4979974	5812101	2345423	4627934	$S'\beta i$
β_i	0,190868	0,168734	0,108921	0,031477	-0,038125	-0,171610	-0,290261	0,999999

Si maintenant on joint les nouvelles valeurs de β_i aux valeurs de $S'\Delta\Theta_i$ que présente le 2[e] tableau du § 7, on déduira successivement des formules (4), (3) et (1) de ce même paragraphe les valeurs des quantités

$$\vartheta_i', \ \Delta'\Theta_i, \ \gamma_i; \quad \vartheta_i'', \ \Delta'\Theta_i \ \delta_{i'}; \quad \vartheta_i''', \ \Delta'\Theta_i$$

comprises dans les tableaux que nous allons tracer.

II. TABLEAU.

Valeurs de $\Delta^2\Theta_i$ et de γ_i.

	$\Delta^2\Theta_1$	$\Delta^2\Theta_2$	$\Delta^2\Theta_3$	$\Delta^2\Theta_4$	$\Delta^2\Theta_5$	$\Delta^2\Theta_6$	$\Delta^2\Theta_7$	$\Delta^2\Theta_3+\Delta^2\Theta_4+\Delta^2\Theta_5+\Delta^2\Theta_6$	$\Delta^2\Theta_1+\Delta^2\Theta_2+\Delta^2\Theta_7$	$S\Delta^2\Theta_i$	$S''\Delta^2\Theta_i$	$L(\pm S''\Delta^2\Theta_i)$
Eau, 1. série	-0,000677	-0,000216	0,000296	0,000627	0,000732	0,000156	-0,000888	0,001811	-0,001811	0	0,002622	5589484
Eau, 2. série	-610	-291	276	627	679	139	-820	1721	-1721	-0,000003	3115	5371892
Solution de potasse	-572	-270	263	579	622	170	-791	1635	-1633	1	3267	5141194
Crownglass, 1. espèce	-355	-232	159	428	438	153	-592	1178	-1179	-1	2357	3723596
Crownglass, 2. espèce	-387	-220	209	396	509	40	-551	1154	-1158	-4	2312	3639878
Crownglass, 3. espèce	-156	-121	22	251	269	76	-315	621	-622	-1	1243	0941711
Flintglass, 1. espèce	326	264	-54	-535	-631	-111	746	-1334	1336	2	-2670	4265113
Flintglass, 2. espèce	605	383	-329	-658	-795	-112	908	-1894	1896	2	-3790	5786892
Flintglass, 3. espèce, 1. série	690	302	-333	-661	-692	-177	869	-1863	1861	-2	-3724	5710097
Flintglass, 3. espèce, 2. série	788	356	-328	-813	-760	-160	922	-1061	2066	5	-4127	6156315
Flintglass, 4. espèce	348	77	-179	-216	-371	-172	512	-968	967	-4	-1935	2866810
Sommes, Flintglass	0,002757	0,001382	-0,001223	-0,002913	-0,003249	-0,000735	0,003987				-0,016216	
Sommes, les autres substances	-2757	-1383	1225	2911	3219	734	-3987				0,016246	
$\Sigma\Delta^2\Theta_i$	0	-0,000001	0,000002	-0,000002	0	-0,000001	0			$\Sigma S''\Delta^2\Theta_i$	0	
$\Sigma''\Delta^2\Theta_i$	-0,005511	-0,002765	0,002118	0,005824	0,006498	0,001469	-0,007974			$\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i$	0,032492	
$L(\Sigma''\Delta^2\Theta_i)$	7114668	4416951	3888111	7652211	8127797	1670218	9016762			$L(\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i)$	5117761	
$L(\Sigma''S''\Delta^2\Theta_i)$	5117764	5117761	5117764	5117764	5117761	5117764	5117761					
$L(\mp\gamma_i)$	2296901	9299187	8770350	2534450	3010033	6552451	3898998	$\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5+\gamma_6$	$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_7$	$S\gamma_i$	$S''\gamma_i$	
γ_i	-0,16970	-0,08510	0,07531	0,17921	0,19999	0,01521	-0,21541	0,49978	-0,50021	-0,0004	0,99999	

III. TABLEAU.

Valeurs de $\Delta^2\Theta_i$ et de δ_i.

	$\Delta^2\Theta_1$	$\Delta^2\Theta_2$	$\Delta^2\Theta_3$	$\Delta^2\Theta_4$	$\Delta^2\Theta_5$	$\Delta^2\Theta_6$	$\Delta^2\Theta_7$	$\Delta^2\Theta_1+\Delta^2\Theta_3+\Delta^2\Theta_6+\Delta^2\Theta_7$	$\Delta^2\Theta_2+\Delta^2\Theta_4+\Delta^2\Theta_5$	$S\Delta^2\Theta_i$	$S'''\Delta^2\Theta_i$	$L(\pm S'''\Delta^2\Theta_i)$
Eau, 1. série	-0,000062	0,000062	0,000023	-0,000022	-0,000008	-0,000008	-0,000001	0,000076	-0,000076	0	0,000152	1818436
Eau, 2. série	-25	-1	16	10	-10	-17	25	23	-25	-0,000002	48	6812412
Solution de potasse	-17	8	17	-7	-31	22	11	58	-55	3	113	0530784
Crownglass, 1. espèce	45	-31	-19	6	-33	46	-13	-17	18	-1	-35	5440680
Crownglass, 2. espèce	5	-23	35	-18	47	-65	16	-37	84	-8	-71	8512584
Crownglass, 3. espèce	55	-15	-72	31	20	20	-40	-107	106	-1	-213	8283796
Flintglass, 1. espèce	-127	37	147	-56	-97	7	89	232	-280	2	562	7497363
Flintglass, 2. espèce	-38	60	-43	21	-37	59	-22	54	-54	0	108	0334238
Flintglass, 3. espèce, 1. série	58	-15	-52	7	53	-9	-45	-121	118	-3	-239	3783979
Flintglass, 3. espèce, 2. série	88	5	-17	-73	65	27	-91	-76	80	4	-156	1931246
Flintglass, 4. espèce	20	-88	-33	101	16	-85	67	-139	137	-2	-276	4409091
Sommes: Eau, potasse flintgl. 1. et 2. espèce	-0,000269	0,000166	0,000160	-0,000051	-0,000167	0,000063	0,000101				0,000083	
Sommes: les autres substances	271	-167	-158	51	168	-66	-106				-990	
$\Sigma\Delta^2\Theta_i$	0,000002	-0,000001	0,000002	0	0,000001	-0,000003	-0,000002			$\Sigma S'''\Delta^2\Theta_i$	-0,000007	
$\Sigma'''\Delta^2\Theta_i$	-0,000540	0,000333	0,000318	-0,000108	-0,000335	0,000129	0,000210			$\Sigma'''S'''\Delta^2\Theta_i$	0,001973	
$L(\mp\Sigma'''\Delta^2\Theta_i)$	7323938	5224112	5021271	0334238	5250418	1105897	9222193			$L(\Sigma'''S'''\Delta^2\Theta_i)$	2951271	
$L(\Sigma'''S'''\Delta^2\Theta_i)$	2951271	2951271	2951271	2951271	2951271	2951271	2951271					
$L(\mp\delta_i)$	4372667	2273171	2073000	7382967	2299177	8151626	0270922	$\delta_1+\delta_3+\delta_6+\delta_7$	$\delta_2+\delta_4+\delta_5$	$S\delta_i$	$S'''\delta_i$	
δ_i	-0,2737	0,1688	0,1612	-0,0317	-0,1698	0,0651	0,1061	0,5018	-0,4982	0,004	1,0000	

IV. TABLEAU.

Valeurs de Θ, ϑ_i', ϑ_i'', ϑ_i''', $\Theta_i - \Delta^4\Theta_i$ et $\Delta^4\Theta_i$.

	Eau		Solution de potasse.	Crownglass			Flintglass					Sommes.
	1. série.	2. série.		1. espèce	2. espèce	3. espèce	1. espèce	2. espèce	3. espèce 1. série.	3. espèce 2. série.	4. espèce	
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,348779	2,353887	2,448260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	26,116183
ϑ_1'	-14137	-14076	-18787	-24897	-25336	-30782	-49139	-55345	-56309	-56291	-56605	-0,401707
ϑ_1''	-615	-585	-555	-400	-392	-211	453	613	632	700	328	-2
ϑ_1'''	-42	-13	-31	10	19	58	-151	-30	65	43	76	1
$\Theta_1 - \Delta^4\Theta_1$	1,771407	1,771512	1,958917	2,323492	2,328178	2,417325	2,566511	2,635989	2,745719	2,615771	2,619624	25,714475
$\Delta^4\Theta_1$	-20	-12	44	35	-14	-3	27	-8	-7	45	-56	1
Θ_1	1,771387	1,771500	1,958961	2,323527	2,328164	2,417322	2,566538	2,635981	2,715712	2,615816	2,649568	25,714476
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,318779	2,353887	2,448260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	26,116183
ϑ_2'	-12198	-12143	-16608	-22009	-22398	-27212	-43110	-48927	-49779	-49766	-50011	-0,355121
ϑ_2''	-308	-293	-278	-201	-197	-106	227	323	317	351	165	0
ϑ_2'''	26	8	19	-6	-12	-36	95	18	-10	-26	-47	-1
$\Theta_2 - \Delta^4\Theta_2$	1,773421	1,773138	1,960153	2,320563	2,331280	2,420906	2,572233	2,612135	2,651829	2,651881	2,635902	25,761061
$\Delta^4\Theta_2$	36	-9	-11	-25	-11	21	-58	42	25	31	-41	0
Θ_2	1,773157	1,773119	1,960142	2,326538	2,331269	2,420927	2,572175	2,612177	2,651851	2,651912	2,655861	25,761061
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,348779	2,353887	2,418260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	26,116183
ϑ_3'	-8068	-8033	-10721	-14208	-14159	-17566	-28012	-31581	-32183	-32125	-32302	-0,229211
ϑ_3''	273	260	216	178	174	94	-201	-286	-281	-311	-146	0
ϑ_3'''	24	8	18	-6	-11	-34	91	17	-39	-25	-41	-1
$\Theta_3 - \Delta^4\Theta_3$	1,778430	1,778421	1,967863	2,334743	2,339591	2,430754	2,587199	2,658868	2,663878	2,665861	2,673333	26,886914
$\Delta^4\Theta_3$	-1	8	-1	-13	46	-38	56	-60	-13	8	11	3
Θ_3	1,778429	1,778429	1,967862	2,334730	2,339637	2,430716	2,587255	2,658808	2,668865	2,668869	2,673344	25,886914
Θ	1,786201	1,786188	1,978320	2,318779	2,353887	2,418260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	26,116183
ϑ_4'	-2331	-2321	-3098	-4106	-4178	-5076	-8101	-9127	-9286	-9251	-9335	-0,066216
ϑ_4''	619	617	586	422	411	223	-479	-679	-668	-740	-347	-2
ϑ_4'''	-8	-3	-6	2	4	12	-31	-6	13	9	15	1
$\Theta_4 - \Delta^4\Theta_4$	1,781511	1,781175	1,975802	2,345097	2,350127	2,413419	2,606737	2,680909	2,691390	2,691307	2,696158	26,019936
$\Delta^4\Theta_4$	-11	13	-1	4	-22	19	-25	27	-6	-82	86	-1
Θ_4	1,781197	1,781192	1,975801	2,345101	2,350105	2,413438	2,806712	2,680936	2,691384	2,691225	2,696241	26,019935

Suite du 4e tableau.

	Eau		Solution de	Crownglass			Flintglass					Sommes.
	1. série.	2. série.	potasse.	1. espèce	2. espèce	3. espèce	1. espèce	2. espèce	3. espèce 1. série.	3. espèce 2. série.	4. espèce	
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,318779	2,353887	2,118260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	26,116183
ϑ_5'	2821	2812	3753	4474	5061	6118	9815	11055	11217	11211	11307	0,080239
ϑ_5''	724	689	633	471	462	219	- 531	- 758	- 745	- 825	- 387	- 1
ϑ_5'''	- 26	- 8	- 19	6	12	36	- 95	- 18	41	26	47	2
$\Theta^4 - \Delta^4\Theta_5$	1,789723	1,789679	1,682707	2,351129	2,359122	2,151693	2,621537	2,701003	2,711874	2,711767	2,716792	26,196123
$\Delta^4\Theta_5$	34	- 2	- 12	- 39	35	- 16	- 2	- 19	12	39	- 31	- 1
Θ_5	1,789757	1,789677	1,982695	2,351190	2,359157	2,151677	2,621535	2,700981	2,711886	2,711806	2,716761	26,196122
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,318779	2,353887	2,118260	2,615351	2'690721	2,701331	2,701322	2,705825	26,116183
ϑ_6'	12711	12656	16891	22385	22780	27676	41181	49761	50627	50614	50891	0,361176
ϑ_6''	161	156	118	107	105	56	- 121	- 171	- 168	- 187	- 87	2
ϑ_6'''	10	3	7	- 2	- 5	- 11	37	7	- 16	- 10	- 18	- 1
$\Theta_6 - \Delta^4\Theta_6$	1,799086	1,799001	1,995366	2,371269	2,376767	2,175978	2,659148	2,740318	2,751774	2,751739	2,756614	26,477360
$\Delta^4\Theta_6$	- 18	- 20	15	48	- 60	34	- 30	52	7	37	- 67	- 2
Θ_6	1,799068	1,798981	1·995381	2,371317	2,376706	2,176012	2,659118	2,740370	2,751781	2,751776	2,756547	26,477358
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,318779	2,353887	2,118260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825	26,116183
ϑ_7'	21500	21106	28570	37862	38531	46844	71728	81167	85632	85609	86082	0,610898
ϑ_7''	- 887	- 845	- 802	- 579	- 567	- 305	655	930	911	1013	475	2
ϑ_7'''	16	5	12	- 4	- 8	- 23	60	11	- 25	- 16	- 29	- 1
$\Theta_7 - \Delta^4\Theta_7$	1,806830	1,806752	2,006100	2,386058	2,391843	2,191743	2,690791	2,775829	2,787852	2,787928	2,792353	26,727082
$\Delta^4\Theta_7$	- 17	20	- 1	- 9	24	- 17	31	- 33	- 20	- 75	96	- 1
Θ_7	1,806813	1,806772	2,006099	2,386049	2,391867	2,191726	2,690725	2,775796	2,787832	2,787853	2,792419	26,727081

Pour abréger, nous avons omis ici les tableaux analogues aux 3e, 5e et 7e tableaux du § 7, c'est à dire, ceux qui servent à déterminer les valeurs de

$$\vartheta_i', \ \Delta^2\Theta_i; \quad \vartheta_i'', \ \Delta^3\Theta_i; \quad \vartheta_i''', \ \Delta^4\Theta_i.$$

Au reste l'exactitude de ces valeurs peut être aisément vérifiée à l'aide des seuls tableaux que nous venons de présenter. Ainsi, en particulier, pour obtenir les valeurs de

$$\vartheta_1', \ \vartheta_1'', \ \vartheta_1'''$$

relatives à l'eau [1re série], il suffira d'ajouter respectivement aux logarithmes de

$$\beta_1, \ \gamma_1, \ \delta_1$$

pris dans les 1re, 2e et 3e tableaux, c'est-à-dire, aux nombres

2807340, 2296904, 4372667

les logarithmes des valeurs de

$$-S'\Delta\Theta_i, \ S''\Delta^2\Theta_i, \ S'''\Delta^3\Theta_i$$

relatives à l'eau [1re série], pris dans ces mêmes tableaux, et dans le 2e tableau du § 7, c'est à dire, les nombres

8696365, 5589484, 1818436.

Les sommes formées, comme on vient de le dire, savoir,

1503705, 7886388, 6191103

représenteront les logarithmes décimaux des nombres

0,014137, 0,000615, 0,000042

qui, pris avec le signe —, offriront précisément les valeurs de

$$\vartheta_1', \ \vartheta_1'', \ \vartheta_1''',$$

inscrites dans le 4e tableau. Il sera d'ailleurs facile de vérifier, à l'aide de ces valeurs, celles que nous avons assignées à

$$\Delta^2\Theta_1, \ \Delta^3\Theta_1, \ \Delta^4\Theta_1;$$

car on tirera des équations (1) du § 7, en ayant égard au 2e tableau de ce même paragraphe,

$$\Delta^2\Theta_1 = \Delta\Theta_1 - \vartheta_1' = -0,014814 + 0,14137 = -0,000677,$$
$$\Delta^3\Theta_1 = \Delta^2\Theta_1 - \vartheta_1'' = -0,000677 + 0,000615 = -0,000062,$$
$$\Delta^4\Theta_1 = \Delta^3\Theta_1 - \vartheta_1''' = -0,000062 + 0,000042 = -0,000020.$$

Dans le 4e tableau, ainsi qu'on devait s'y attendre, les valeurs numériques des quatre quantités

$$\Theta, \ \vartheta_i, \ \vartheta_i', \ \vartheta_i''$$

forment, pour chaque substance, et pour chaque rayon, une suite décroissante. Les valeurs corrigées de Θ_i, ou les valeurs de

$$\Theta_i - \Delta^4\Theta_i,$$

que fournit ce même tableau, sont toutes comprises dans la formule (11) du § 7, de laquelle on peut les déduire en substituant aux quantités

$$\Theta,\quad U' = S'\Delta\Theta_i,\quad U'' = S''\Delta^2\Theta_i,\quad U''' = S'''\Delta^3\Theta_i,$$

et

$$\beta_i,\quad \gamma_i,\quad \delta_i$$

les valeurs que nous venons d'employer, et qui se trouvent réunies dans les tableaux suivants.

V. TABLEAU.

Valeurs de Θ, U, U', U''.

	Eau		Solution de	Crownglass			Flintglass				
	1. série.	2. série.	potasse.	1. espèce.	2. espèce.	3. espèce.	1. espèce.	2. espèce.	3. espèce. 1. série.	3. espèce. 2. série.	4. espèce.
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,318779	2,353987	2,418260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825
U'	-0,074069	-0,073746	-0,098129	-0,130139	-0,132743	-0,161272	-0,257449	-0,289966	-0,295013	-0,294935	-0,296565
U''	0,003622	0,003445	0,003267	0,002357	0,002312	0,001213	-0,002670	-0,003790	-0,003724	-0,001127	-0,001935
U'''	0,000152	0,000048	0,000113	-0,000035	-0,000071	-0,000213	0,000562	0,000108	0 000239	-0,000156	-0,000276

VI. TABLEAU.

Valeurs de β_i, γ_i, δ_i.

i	1	2	3	4	5	6	7	Sommes des valeurs numériques.
β_i	0,190868	0,168731	0,108921	0,031477	-0,038125	-0,171610	-0,290264	0,999999
γ_i	-0,16870	-0,08510	0,07534	0,17924	0,19999	0,01521	-0,24541	0,99999
δ_i	-0,2737	0,1688	0,1612	-0,0517	-0,1698	0,0654	0,1064	1,0000

Quant aux valeurs des trois sommes réprésentées dans la formule dont il s'agit par les notations

$$S''\beta_i,\quad S''\gamma_i,\quad S'''\gamma_i,$$

on les déduira sans peine des formules (6) du § 7, et l'on trouvera

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} S''\beta_i &= 0{,}430662 - 0{,}569337 = -0{,}138675, \\ S''\beta_i &= 0{,}315780 - 0{,}684219 = -0{,}368439, \\ S'''\gamma_i &= 0{,}29025 \;\; - 0{,}70974 \;\; = -0{,}41949. \end{aligned} \right.$$

Aux valeurs corrigées de Θ_i, fournies par le 4[e] tableau, et représentées par

$$\Theta_i - \Delta^{\circ}\Theta_i$$

correspondront des valeurs corrigées de θ_i que nous représenterons encore par

$$\theta_i - \Delta^{\circ}\theta_i,$$

et dans lesquelles on déterminera $\Delta'\theta_i$ avec une approximation suffisante à l'aide de la formule (13) du §. 7. Effectivement les valeurs de $\Delta'\theta_i$ ainsi obtenues, et inscrites dans le tableau suivant, vérifient sensiblement la double condition de fournir pour les quantités (150), ou pour les quantités (151) du § 6, quatre valeurs égales au signe près, mais alternativement affectées de signes contraires.

VII. TABLEAU.

Valeurs de $\Delta'\theta_i$ .... exprimées en millionièmes.

	Eau		Solution de potasse.	Crownglass			Flintglass				
	1. série.	2. série.		1. espèce.	2. espèce.	3. espèce.	1. espèce.	2. espèce.	3. espèce. 1. série.	3. espèce. 2. série.	4. espèce.
$\Delta'\theta_1$	-8	-5	5	11	-5	-1	8	-2	-2	14	-17
$\Delta'\theta_2$	14	-3	-4	-8	-4	7	-18	18	8	10	-13
$\Delta'\theta_3$	0	3	0	-4	15	-12	17	-18	-4	2	3
$\Delta'\theta_4$	-5	5	0	1	-7	6	-8	8	-2	-25	26
$\Delta'\theta_5$	13	1	-1	-18	11	-5	-1	-6	4	12	-9
$\Delta'\theta_6$	-7	-7	5	16	-19	11	-6	16	2	11	-20
$\Delta'\theta_7$	-6	7	0	-3	8	-5	9	-10	-6	-22	29
$\Delta'\theta_1 + \Delta'\theta_2$	6	-8	1	3	-6	6	-10	11	6	24	-30
$\Delta'\theta_3 + \Delta'\theta_4$	-5	8	0	-3	8	-6	9	-10	-6	-23	29
$\Delta'\theta_5 + \Delta'\theta_6$	6	-6	1	3	-8	6	-10	10	6	23	-29
$\Delta'\theta_7$	-6	7	0	-3	8	-5	9	-10	-6	-22	29
$\Delta'\theta_1$	-8	-5	5	11	-5	-1	8	-2	-2	14	-17
$\Delta'\theta_2 + \Delta'\theta_7$	8	4	-4	-11	4	2	-9	3	2	-12	16
$\Delta'\theta_3 + \Delta'\theta_6$	-7	-4	5	12	-4	-1	8	-2	-2	13	-17
$\Delta'\theta_4 + \Delta'\theta_5$	8	6	-4	-12	4	1	-9	2	2	-13	17

Au reste les valeurs de $\Delta'\theta_i$ inscrites dans le tableau précédent diffèrent très peu de celles que fournissait le 12ᵉ tableau du § 7. En effet les différences entre les unes et les autres, étant exprimées en millionièmes, sont telles que les offre le tableau suivant.

VIII. TABLEAU.

Différences entre les valeurs de $\Delta^4\theta_i$ obtenues dans les § 8 et 7.

	Eau		Solution de potasse.	Crownglass			Flintglass				
	1. série.	2. série.		1. espèce	2. espèce	3. espèce	1. espèce	2. espèce	3. espèce 1. série	3. espèce 2. série	4. espèce
pour $i = 1$	0	-1	1	-2	-2	-3	6	2	-3	-2	-3
2	-1	0	-2	2	2	5	-10	-2	5	3	5
3	2	-2	0	-3	-4	-8	14	4	-6	-4	-8
4	-1	2	0	3	4	6	-10	-3	4	2	6
5	0	0	-1	-2	-2	-2	3	1	-1	0	-2
6	-1	2	0	2	3	5	-7	-2	3	1	4
7	0	0	1	0	0	-1	3	1	-2	0	-2

Donc ces différences sont généralement très petites, et inférieures ou tout au plus égales à 10 millionièmes, si l'on en excepte une qui s'élève à 14 millionièmes seulement.

En retranchant les valeurs de $\Delta^4\theta_i$ fournies par le 7e tableau des valeurs de θ_i données par le 1er tableau du § 6, et remplaçant les deux valeurs d'une même quantité qui correspondent aux deux séries d'expériences faites sur l'eau ou la troisième espèce de flintglass par la moyenne arithmétique entre ces deux valeurs, on obtiendra les valeurs corrigées de θ_i, ou, en d'autres termes les valeurs de

$$\theta_i - \Delta^4\theta_i$$

inscrites dans le tableau suivant.

IX. TABLEAU.

Valeurs de $\theta_i - \Delta^4\theta_i$.

	Eau	Solution de potasse.	Crownglass			Flintglass			
			1. espèce	2. espèce	3. espèce	1. espèce	2. espèce	3. espèce	4. espèce
$\theta_1 - \Delta^4\theta_1$	1,330963	1,399621	1,524301	1,525837	1,551775	1,602031	1,623572	1,626574	1,627766
$\theta_2 - \Delta^4\theta_2$	1,331705	1,400519	1,525307	1,526853	1,555926	1,603818	1,625164	1,628451	1,629891
$\theta_3 - \Delta^4\theta_3$	1,333576	1,402805	1,527986	1,529572	1,559087	1,608177	1,630603	1,633668	1,635033
$\theta_4 - \Delta^4\theta_4$	1,335850	1,405632	1,531371	1,533012	1,563116	1,611510	1,637318	1,640533	1,641998
$\theta_5 - \Delta^4\theta_5$	1,337796	1,408086	1,531350	1,536011	1,566716	1,620043	1,643472	1,646760	1,648269
$\theta_6 - \Delta^4\theta_6$	1,341285	1,412574	1,539892	1,541876	1,573524	1,630781	1,655390	1,658812	1,660305
$\theta_7 - \Delta^4\theta_7$	1,344169	1,416368	1,544687	1,546558	1,579475	1,640364	1,666082	1,669697	1,671033

D'après ce qui a été dit, les valeurs corrigées de θ_i, représentées ici par $\theta_i - \Delta^4\theta_i$, doivent mériter plus de confiance que les valeurs de θ_i fournies par les observations, ou même que les valeurs de $\theta_i - \Delta^4\theta_i$ calculées dans les paragraphes 6 et 7.

§. 9. *Sur la propagation de la lumière dans les milieux ou sa vitesse reste la même pour toutes les couleurs.*

On ne peut douter que dans le vide, c'est à dire, dans cet espace dont l'étendue effraye l'imagination, et au travers duquel les rayons des astres parviennent jusqu'à nous, la vitesse de la lumière ne reste la même pour toutes les couleurs. Autrement les étoiles nous apparaîtraient, non plus comme des points brillants, mais comme des bandes lumineuses et très étroites qui offriraient à nos yeux les diverses nuances du spectre solaire. Ainsi le fluide éthéré, lorsqu'il est seul, et que sa constitution naturelle n'est pas modifiée par la présence des corps pondérables, a la propriété de transmettre avec la même vitesse les rayons diversement colorés, par exemple, les rayons rouges et les rayons violets. Il y a plus, l'éther paraît conserver encore cette propriété, lorsque ses molécules se trouvent en présence de celles d'un corps gazeux; du moins jusqu'à ce jour on n'a pu découvrir dans les gaz aucune trace de la dispersion des couleurs. Donc, sous certaines conditions, la vitesse de propagation de la lumière, ou la quantité représentée par Ω dans le 2e paragraphe et les suivants, doit devenir indépendante de l'épaisseur l des ondes lumineuses. En d'autres termes, les formules (1) et (3) du § 3, savoir

$$\Omega T = l \tag{1}$$

et

$$s = k\,\Omega \tag{2}$$

doivent, sous certaines conditions, fournir pour la durée T des vibrations lumineuses une valeur proportionnelle à l, et pour la quantité

$$s = \frac{2\pi}{T} \tag{3}$$

une valeur proportionelle à celle de

$$k = \frac{2\pi}{l}. \tag{4}$$

C'est de la recherche de ces conditions que nous allons maintenant nous occuper.

Considérons des vibrations lumineuses propagées dans le vide, ou généralement dans un milieu où l'élasticité de l'éther reste la même en tous sens. Alors les quantités s et k seront liées entre elles par la formule (79) ou (80) du § 3. On pourra même débarasser cette formule de l'angle α, en ayant égard aux équations (50) et (51) de la page 35, et à l'équation identique

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{5}$$

Effectivement en vertu de cette dernière, et en étendant les sommes indiquées par le signe Σ à toutes les valeurs paires de λ, μ, ν qui vérifient la condition

$$\frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} = n, \tag{6}$$

on trouvera

$$(7)\qquad S\left\{mr^{2n-1}f(r)\right\}=S\left\{mr^{2n-1}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)^n f(r)\right\}$$

$$=\Sigma\left\{\frac{1.2.3..n}{\left(1.2..\frac{\lambda}{2}\right)\left(1.2..\frac{\mu}{2}\right)\left(1.2..\frac{\nu}{2}\right)}S\left[mr^{2n-1}f(r)\cos^\lambda\alpha\cos^\mu\beta\cos^\nu\gamma\right]\right\}$$

puis on conclura de l'équation (7) combinée avec la formule (50) du § 3

$$(8)\quad S\left\{mr^{2n-1}f(r)\right\}=\frac{1.2.3...n}{1.3.5..(2n-1)}S\left\{mr^{2n-1}f(r)\cos^{2n}\alpha\right\}\Sigma\left\{\frac{1.3..(\lambda-1)}{1.2..\frac{\lambda}{2}}\frac{1.3..(\mu-1)}{1.2..\frac{\mu}{2}}\frac{1.3..(\nu-1)}{1.2..\frac{\nu}{2}}\right\}.$$

D'ailleurs en désignant par x, y, z des variables quelconques, on aura en vertu d'une formule connue

$$\Sigma\left\{\frac{x(x+1)..(x+\frac{\lambda}{2}-1)}{1.2..\frac{\lambda}{2}}\frac{y(y+1)..(y+\frac{\mu}{2}-1)}{1.2..\frac{\mu}{2}}\frac{z(z+1)..(z+\frac{\nu}{2}-1)}{1.2..\frac{\nu}{2}}\right\}$$

$$=\frac{(x+y+z)(x+y+z+1)....(x+y+z+n-1)}{1.2.3...n},$$

puis on tirera de cette dernière équation, en y posant

$$x=y=z=\frac{1}{2}$$

et multipliant les deux membres par 2^n

$$(9)\qquad \Sigma\left\{\frac{1.3..(2\lambda-1)}{1.2..\frac{\lambda}{2}}\frac{1.3..(2\mu-1)}{1.2..\frac{\mu}{2}}\frac{1.3..(2\nu-1)}{1.2..\frac{\nu}{2}}\right\}=\frac{3.5....(2n-1)(2n+1)}{1.2.3...n}$$

Donc la formule (8) donnera

$$S\left\{mr^{2n-1}f(r)\right\}=(2n+1)S\left\{mr^{2n-1}f(r)\cos^{2n}\alpha\right\},$$

et par suite

$$(10)\qquad S\left\{mr^{2n-1}f(r)\cos^{2n}\alpha\right\}=\frac{1}{2n+1}S\left\{mr^{2n-1}f(r)\right\}.$$

Pareillement on tirera de la formule (5) jointe à l'équation (51) du § 3

$$(11)\qquad S\left\{mr^{2n-3}f(r)\cos^{2n}\alpha\right\}=\frac{1}{2n+1}S\left\{mr^{2n-3}f(r)\right\}.$$

Cela posé, la valeur de s^2 déterminée par l'équation (80) du même paragraphe deviendra

$$(12) \qquad s^2 = k^2\,\mathrm{S}\left\{\frac{mr}{1.2.3}\left[\mathrm{f}(r)+\tfrac{1}{5}f(r)\right]\right\} - k^4\,\mathrm{S}\left\{\frac{mr^3}{1.2.3.4.5}\left[\mathrm{f}(r)+\tfrac{1}{7}f(r)\right]\right\}$$

$$+ k^6\,\mathrm{S}\left\{\frac{mr^5}{1.2.3.4.5.6.7}\,\mathrm{f}(r)+\frac{1}{9}f(r)]\right\} - \text{etc.}\ldots$$

D'autre part, comme la formule (13) du § 1er donne

$$(13) \qquad f(r) = r\,\mathrm{f}'(r) - \mathrm{f}(r),$$

on aura généralement, pour une valeur quelconque du nombre entier n,

$$r^{2n-1}\left[\mathrm{f}(r)+\frac{1}{2n+3}f(r)\right] = \frac{r^{2n}\,\mathrm{f}'(r)+(2n+2)r^{2n-1}\mathrm{f}(r)}{2n+3} = \frac{1}{(2n+3)r^2}\,\frac{d\left(r^{2n+2}\,\mathrm{f}(r)\right)}{dr},$$

et en conséquence l'équation (12) pourra être réduite à

$$(14) \qquad s^2 = \frac{1}{5}\,\frac{k^2}{1.2.3}\,\mathrm{S}\left\{\frac{m}{r^2}\,\frac{d\left(r^4\,\mathrm{f}(r)\right)}{dr}\right\} - \frac{1}{7}\,\frac{k^4}{1.2.3.4.5}\,\mathrm{S}\left\{\frac{m}{r^2}\,\frac{d\left(r^6\,\mathrm{f}(r)\right)}{dr}\right\}$$

$$+ \frac{1}{9}\,\frac{k^6}{1.2.3.4.5.6.7}\,\mathrm{S}\left\{\frac{m}{r^2}\,\frac{d\left(r^8\,\mathrm{f}(r)\right)}{dr}\right\} + \text{etc.}\ldots$$

Enfin l'on a évidemment

$$\frac{1}{5}\,\frac{k^2r^4}{1.2.3} - \frac{1}{7}\,\frac{k^4r^6}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{9}\,\frac{k^6r^8}{1.2.3.4.5.6.7} - \text{etc.}\ldots$$

$$= \frac{r}{k^2}\,\frac{d\left(\dfrac{k^4r^4}{1.2.3.4.5} - \dfrac{k^6r^6}{1.2.3.4.5.6.7} + \dfrac{k^8r^8}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} - \text{etc.}\ldots\right)}{dr}$$

$$= \frac{r}{k^2}\,\frac{d\left\{\dfrac{\sin kr}{kr} - \left(1 - \dfrac{k^2r^2}{1.2.3}\right)\right\}}{dr} = \frac{1}{k^2}\left(\cos kr - \frac{\sin kr}{kr} + \tfrac{1}{3}k^2r^2\right).$$

Donc la formule (14) pourra s'écrire comme il suit

$$(15) \qquad s^2 = \mathrm{S}\left\{\frac{m}{k^2r^2}\,\frac{d\left(\left(\cos kr - \dfrac{\sin kr}{kr} + \tfrac{1}{3}k^2r^2\right)\mathrm{f}(r)\right)}{dr}\right\}.$$

Au reste la formule (15), comme nous le prouverons dans un autre mémoire, pourrait encore se déduire immédiatement de la formule (79) du § 6.

Les formules (79) et (80) du § 3, ou la formule (15), à laquelle on peut les réduire, se rapportent au cas où, les conditions (48), (49), (50), (51) [§ 3] se trouvant remplies, la propagation de la lumière s'effectue de la même manière en tous sens; et nous devons ajouter que ce phénomène, qui a rigoureusement lieu dans le vide, subsiste approximativement dans les divers milieux; puisque, dans les corps doués de la double réfraction, la différence entre les vitesses de propagation des rayons ordinaire et extraordinaire est généralement fort petite. Or les conditions que nous venons de rappeler se vérifient toujours, comme il est facile de s'en assurer, lorsque dans les sommes indiquées par le signe S et qui sont de l'une des formes

$$S\left\{mr^{2n-1}f(r)\cos^{\lambda}\alpha\cos^{\mu}\beta\cos^{\nu}\gamma\right\},\quad S\left\{mr^{2n-3}f(r)\cos^{\lambda}\alpha\cos^{\mu}\beta\cos^{\nu}\gamma\right\},$$

les sommations relatives aux angles α, β, γ compris entre le rayon vecteur r et les demiaxes des coordonnées positives, peuvent être remplacées par des intégrations aux différences infiniment petites, et relatives à deux angles auxiliaires p, q liés aux trois premiers par les équations

$$(16)\qquad \cos\alpha = \cos p,\quad \cos\beta = \sin p\cos q,\quad \cos\gamma = \sin p\sin q;$$

l'angle p étant celui que forme le rayon vecteur r avec une axe fixe, et l'angle q celui que forme un plan fixe mené par l'axe fixe avec le plan mobile qui renferme le même axe et le rayons r. Il est donc naturel de penser qu'on obtiendra une première approximation des mouvements de l'ether dans tous les milieux, et probablement avec une grande précision les lois de son mouvement dans le vide, si l'on change les sommations doubles relatives aux angles p, q en intégrations doubles, ou même les sommations triples relatives aux variables p, q, r en intégrations triples. Alors, en designant par ρ la densité de l'éther au point avec lequel coincide la molécule m, par m une seconde molécule dont les coordonnées polaires soient p, q, r, par $F(r)$ une fonction du rayon vecteur r, qui s'évanouisse pour $r = \infty$, et par π le rapport de la circonférence au diamètre, ou le nombre 3,14159265..., on trouvera

$$(17)\qquad S\{mF(r)\} = \int_{r_0}^{r_\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\rho r^2F(r)\sin p\,dp\,dq\,dr,$$

le signe S s'étendant, dans le premier membre de l'équation (18), à toutes les molécules m distinctes de m, et

$$r_0,\quad r_\infty,$$

représentant deux valeurs de r, dont la première soit nulle ou bien équivalente à la plus petite distance qui sépare deux molécules voisines d'éther, la seconde infinie ou du moins assez grande pour que, dans l'expression

$$S\{mF(r)\},$$

la somme des termes correspondants à des valeurs plus considérables de r puisse être négligée sans erreur sensible. Comme on aura d'ailleurs

$$\int_0^\pi \sin p\, dp = 2, \qquad \int_0^{2\pi} dq = 2\pi,$$

on pourra, ce supposant la densité ρ constante, réduire la formule (17) à

(18) $$S\,\{mF(r)\} = 4\pi\rho\int_{r_0}^{r_\infty} r^2 F(r)\, dr,$$

et par suite l'équation (15) donnera

(19) $$s^2 = 4\pi\rho\int_{r_0}^{r_\infty} \frac{d\left\{\frac{1}{k^2}\left(\cos kr - \frac{\sin kr}{kr} + \frac{1}{3}k^2r^2\right)f(r)\right\}}{dr}\, dr.$$

Or, pour de très grandes ou de très petites valeurs de r, le produit

(20) $$\frac{1}{k^2}\left(\cos kr - \frac{\sin kr}{kr} + \frac{1}{3}k^2r^2\right) = \frac{1}{3}r^2 + \frac{\cos kr}{k^2} - \frac{\sin kr}{k^3 r}$$

$$= \frac{1}{5}\,\frac{k^2r^4}{1.2.3} - \frac{1}{7}\,\frac{k^4r^6}{1.2.3.4.5} + \text{etc.},$$

développé en un trinome ou en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de r, pourra être remplacé sans erreur sensible par le premier terme de son developpement; et ce premier terme, vis à vis duquel tous les autres pourront être négligés, sera, pour de très grandes valeurs de r

$$\frac{1}{3}\,r^2,$$

et pour de très petites valeurs de r

$$\frac{1}{5}\,\frac{k^2r^4}{1.2.3} = \frac{1}{30}\,k^2r^4.$$

Donc la formule (19) donnera sensiblement

(21) $$s^2 = \frac{4\pi\rho}{3}\left\{r_\infty^2 f(r_\infty) - \frac{1}{10}\,k^2 r_0^4 f(r_0)\right\}.$$

Supposons maintenant $r_0 = 0$, $r_\infty = \infty$. L'équation (21) fournira pour s^2 une valeur finie, positive et différente de zéro, dans deux cas dignes de remarque, savoir 1° quand le produit

(22) $$r^2 f(r)$$

se réduira, pour une valeur infiniment grande de la distance r, à une constante finie, et positive, 2° quand le produit

(23) $$r^4 f(r)$$

se réduira, pour une valeur infiniment petite de r, à une constante finie mais négative. Le premier cas aura lieu, par exemple, si l'on suppose

(24) $$f(r) = \frac{G}{r^2}$$

G designant une constante positive, et alors le valeur de s^2, réduite à

(25) $$s^2 = \frac{4\pi}{3} \varrho G,$$

deviendra indépendante de la quantité *k*. Pareillement le second cas aura lieu, si l'on suppose

(26) $$f(r) = -\frac{H}{r^4}$$

H désignant encore une constante positive, et alors la valeur de *s* déterminée par l'équation

(27) $$s^2 = \frac{4\pi}{30} \varrho H k^2,$$

deviendra proportionelle à *k*. Comme d'ailleurs le produit

(28) $$\mathrm{m}\, m\, f(r)$$

représente l'attraction ou la répulsion mutuelle des deux molécules m, *m*, la quantité $f(r)$ etant positive, lorsque les masses m, *m* s'attirent, et négative, lorsqu'elles se repoussent; il résulte des formules (24) et (25), ou (26) et (27) que la quantité *s* deviendra indépendante de *k*, si deux molécules s'attirent en raison inverse du carré de la distance qui les sépare, et proportionelle à *k*, si deux molécules se repoussent en raison inverse de la quatrième puissance de cette distance. Au reste, pour obtenir la formule (25), il ne sera pas absolument nécessaire d'attribuer à la fonction $f(r)$ la forme que présente l'équation (24), et il suffira, par exemple, de supposer

(29) $$f(r) = \frac{\mathfrak{F}(r)}{r^2},$$

$\mathfrak{F}(r)$ etant une nouvelle fonction qui se réduise à *G* pour $r = \infty$, sans devenir infinie pour $r = 0$. Pareillement, pour obtenir la formule (27), il suffira de supposer

(30) $$f(r) = \frac{\mathfrak{F}(r)}{r^4},$$

$\mathfrak{F}(r)$ etant une fonction de *r* qui se réduise à *H* pour $r = 0$, sans devenir infinie pour $r = \infty$. C'est ce qui arriverait en particulier si l'on posait

$$\mathfrak{F}(r) = H e^{-ar}, \quad \text{ou} \quad \mathfrak{F}(r) = H e^{-ar} \cos b r, \quad \text{etc.} \ldots.$$

et par suite

(31) $$f(r) = -\frac{He^{-ar}}{r^2}, \quad \text{ou} \quad f(r) = -\frac{He^{-ar} \cos br}{r^2}, \quad \text{etc.} \ldots$$

a, *b* désignant de constantes réelles dont la première serait positive; etc. . . .

De la formule (27), combinée avec la formule (2), on tire

(32) $$\Omega^2 = \frac{4\pi}{30} \varrho H.$$

En vertu de cette dernière, la vitesse de propagation Ω des vibrations moléculaires devient indépendante de la durée de ces vibrations. On peut donc considérer la formule (27) comme propre à représenter la loi de propagation de la lumière dans le vide, ou même dans les gaz; et alors l'action mutuelle de deux molécules d'éther doit prendre l'une des formes qui répondent à l'équation (27), de telle sorte que, *dans le voisinage du contact, cette action soit répulsive et réciproquement proportionelle au bi-carré de la distance.*

Roemer et *Cassini* ont remarqué les premiers que les éclipses des satellites de Jupiter, calculées d'après les observations faites pour une distance donnée de cette planète à la terre, cessaient d'être appereues aux époques déterminées par le calcul lorsque cette distance venait à croitre ou à diminuer. En comparant l'avance ou le retard qui avait lieu dans l'observation de chaque éclipse avec la diminution ou l'accroissement de la distance des deux planetes, ils en ont conclu que la lumière employe 8′ 13″ ou 493 secondes sexagésimales de temps pour parcourir un espace égal au rayon moyen de l'orbite terrestre, c'est à dire, 39229000 lieues de 2000 toises chacune ou de 3898,07318 mètres. Il en résulte que la vitesse de propagation de la lumière est de 79572 lieues ou environ 310177500 mètres. Donc en prenant le mètre pour unité de longueur et la seconde sexagésimale pour unité de temps, on aura dans les formules (2) et (32),

(33) $$\Omega = 310177500, \quad \text{et} \quad L(\Omega) = 8{,}4916103.$$

Cela posé, l'équation (32) donnera

(34) $$\rho H = 22968\,(10)^{12} \quad \text{environ.}$$

La valeur du produit ρH déterminée par la formule (30) etant très considérable, il est nécessaire qu'au moins l'un des facteurs de ce produit soit un très grand nombre. D'ailleurs, si, pour plus de simplicité, l'on suppose que les masses de toutes les molécules d'éther soint égales entre elles, et si l'on prend alors la masse d'une molécule pour unité de masse, le facteur H représentera l'intensité de la répulsion qu'exerceraient l'une sur l'autre deux molécules d'éther placées à un mètre de distance dans le cas où l'on étendrait à des distances quelconques la loi de répulsion déterminée par la formule (26), et ci-dessus etablie pour de très petites distances. Or nous n'avons point de raisons de croire que le facteur H ainsi défini ait une valeur considérable. Nous devons plutôt penser qu'il offre une valeur très petite, ou, en d'autres termes, que la vitesse propre à mesurer la force répulsive dont il s'agit c'est à dire, la vitesse communiquée par cette force dans la première seconde sexagésimale à chacune des deux molécules prises dans l'état de repos, et placées en présence l'une de l'autre à un mètre de distance, serait une vitesse très peu considérable, en vertu de la quelle chaque molécule ne parcourrait en une seconde de temps qu'un espace représenté par une très petite fraction du mètre. Mais il est essentiel d'ajouter que, dans l'hypothèse admise, la densité de l'éther ou le facteur ρ se réduira au nombre des molécules éthérées comprises sous l'unité de volume, c'est

26 *

à dire, sous le volume d'un mètre cube. Cela posé, de l'équation (34) présentée sous la forme

(35) $$\rho = 22968\,(10)^{12}\,\frac{1}{H},$$

il résulte seulement que pour obtenir la millionième partie de ρ, c'est à dire, le nombre des molécules d'éther comprises dans un millimètre cube, on doit répéter plus de vingt deux mille-millions de millions de fois le nombre vraisemblablement déjà très considérable qui se trouve exprimé par $\frac{1}{H}$.

Si l'on nomme $\mathfrak{D}$ la densité moyenne du globe terrestre, évaluée comme celle de l'éther vient de l'être, c'est à dire, la valeur moyenne du nombre des molécules de matière pondérable, comprises dans ce globe sous le volume d'un mètre cube, et G la valeur moyenne de l'attraction qu'exercent l'une sur l'autre deux de ces molécules, placées à un mètre de distance; le rapport

$$\frac{G}{r^2}$$

représentera l'action des mêmes molécules placées à la distance r: et, comme, en nommant $\mathfrak{R}$ le rayon moyen de la terre, on trouvera le volume du globe terrestre sensiblement égal à

$$\frac{4\pi}{3}\,\mathfrak{R}^3,$$

l'intensité g de la pesanteur à la surface de la terre aura pour mesure le produit des trois facteurs

$$\mathfrak{D},\quad \frac{G}{\mathfrak{R}^2},\quad \frac{4\pi}{3}\,\mathfrak{R}^3.$$

On aura donc

(36) $$g = \frac{4\pi}{3}\,\mathfrak{D}\,G\,\mathfrak{R}.$$

De cette dernière formule, combinée avec l'équation (32), on tirera

(37) $$\rho H = 10\,\frac{\Omega^2 \mathfrak{R}}{g}\,\mathfrak{D}\,G.$$

D'ailleurs, en prenant le mètre pour unité de longueur et la seconde sexagésimale pour unité de temps, on a trouvé à l'observatoire de Paris

$$g = 9{,}8088,$$

et le rayon moyen de la terre, exprimé en metres, est environ

$$\mathfrak{R} = 6366745.$$

Par suite, on tirera de l'équation (36)

(38) $$\mathfrak{D}\,G = 0{,}0000003678,$$

et de l'équation (37), environ,

(39) $$\rho H = 62448 (10)^{12}\, \mathfrak{D}\, G.$$

Comme le nombre $\mathfrak{D}$ des molécules du globe comprises sous le volume d'un mètre cube ne peut être supposé que très considérable, il résulte de l'équation (38) que l'intensité H de la force qui représente l'attraction de deux de ces molécules placées à un mètre de distance doit être fort petite, et de beaucoup inférieure à

$$\left(\frac{1}{10}\right)^6$$

c'est à dire à un millionième. Quant à l'équation (39), elle donnera

(40) $$\frac{\rho}{\mathfrak{D}} = 62448 (10)^{12} \frac{G}{H},$$

et l'on en déduira une très grande valeur du rapport $\frac{\rho}{\mathfrak{D}}$, à moins toutefois de supposer, ce qui n'est guères probable, que la répulsion H de deux molécules d'éther transportées à un mètre de distance sans que la loi de leur repulsion se trouve altérée, surpasse extraordinairement l'attraction G de deux molécules pondérables placées à la même distance. En rejettant cette dernière hypothèse, et supposant au contraire le nombre H comparable au nombre G, on conclurra de la formule (40) que dans un espace qui renferme seulement quelques molécules de matière pondérable, les molécules d'éther se comptent par mille millions de millions. On peut dire en ce sens que la densité de l'éther est considérablement supérieure à celle des gaz, des liquides, ou même des solides. Mais cette proposition cesserait d'être exacte, et l'on pourrait même soutenir la proposition contraire, si l'on prenait pour mesure de la densité le poids des molécules comprises sous l'unité de volume, au lieu du nombre de ces molécules.

Si l'on applique la formule (32) à la propagation de la lumière, non seulement dans le vide, mais aussi dans les milieux où l'on n'apperçoit nulle trace de dispersion, par exemple, dans l'air atmosphérique, si d'ailleurs on nomme

$$\rho' \quad \text{et} \quad \Omega'$$

ce qui deviennent la densité ρ de l'éther, et la vitesse Ω de la lumière quand on substitue l'air atmosphérique au vide, ou plus généralement le nouveau milieu au vide, on aura simultanément

$$\Omega^2 = \frac{4\pi}{30}\rho h, \qquad \Omega'^2 = \frac{4\pi}{30}\rho' h,$$

et par suite

(41) $$\frac{\Omega'^2}{\rho'} = \frac{\Omega^2}{\rho} \quad \text{ou} \quad \frac{\Omega'}{\sqrt{\rho'}} = \frac{\Omega}{\sqrt{\rho}}.$$

En vertu de cette dernière formule, la vitesse de propagation de la lumière, dans les

milieux qui ne dispersent pas les couleurs, serait proportionelle à la racine carrée de la densité de l'éther dans ces mêmes milieux.

D'ailleurs, si l'on nomme θ l'undice de réfraction de la lumière passant du vide dans le milieu que l'on considère, on aura [voyez la formule (8) du § 6]

$$(42) \qquad \Omega' = \frac{\Omega}{\theta},$$

et par suite la formule (41) donnera

$$(43) \qquad \varrho' = \frac{\varrho}{\theta^2}.$$

Or, comme l'indice de réfraction θ surpasse toujours l'unité, la valeur de ϱ' determinée par l'équation (43) sera toujours inférieure à celle de ϱ. Ainsi l'application de la formule (32) aux divers milieux qui ne dispersent pas les couleurs, nous conduit à supposer que la densité de l'éther, ou le nombre des molécules ethérées comprises sous l'unité de volume, est plus considérable dans le vide que dans tout autre milieu. Au reste, en vertu de la formule (43), la diminution de densité de l'éther, quand on passera du vide dans un gaz quelconque, devra être généralement fort petite, attendu que, pour tous les gaz, l'indice de réfraction θ diffère très peu de l'unité, et que pour chacun d'eux la valeur de $\theta - 1$ fournie par l'observation ne s'est jamais élevée à 16 dix-millièmes.

L'indice de réfraction de l'air atmosphérique peut être déterminé directement pour une température donnée et sous une pression donnée. C'est ce qu'on fait MM. *Biot* et *Arago* qui ont trouvé cet indice égal à 1,000294 pour la température zéro et sous la pression représentée par une colonne de mercure de 76 centimétres de hauteur. On peut aussi déduire le même indice des observations astronomiques, et on trouve alors pour sa valeur moyenne le nombre

1,000276.

En multipliant par ce dernier nombre les diverses valeur de l_i que fournit le 2e tableau du § 6, c'est à dire les épaisseurs des ondes lumineuses, mesurées dans l'air et correspondantes aux rayons

B, C, D, E, F, G, H,

de *Frauenhofer*, on obtieudra les épaisseurs de ces ondes dans le vide, telles que les présente le tableau suivant.

I. TABLEAU.

Epaisseurs des ondes dans le vide, en dixmillionièmes de millimètre.

	$i = 1$	2	3	4	5	6	7
Valeurs de l_i dans l'air	6878	6561	5888	5260	4843	4291	3928
logarithmes	8374930	8172000	7699176	7209611	6850988	6325176	5941557
L (1,000276)	0001198	0001198	0001198	0001198	0001198	0001198	0001198
Sommes	8376128	8173198	7700674	7210809	6852184	6326374	5942755
valeurs de l_i dans le vide	6880	6566	5889	5261	4844	4292	3929

Ainsi les épaisseurs des ondes lumineuses sont un peu plus grandes dans le vide que dans l'air. Mais, tandis que l'on passe de l'air dans le vide, la variation de l'épaisseur d'une onde ne s'élève point audelà de 2 dixmillionièmes de millimètre, et reste toujours inférieure à trois dixmillièmes de cette même épaisseur; d'ou il résulte que la variation dont il s'agit pourrait être négligée comme comparable aux erreurs des observations qui ont fourni les valeurs de l_i exprimées en cent millionièmes de pouce et inscrites dans le 2e tableau du § 6.

En joignant le tableau qui précède aux formules (1), (2), (3), (4), et à l'équation (33), prenant toujours le mètre et la seconde sexagésimale pour unités de longueur et de temps, effectuant les calculs par logarithmes, et désignant par

$$N = \frac{1}{T} \tag{44}$$

le nombre des vibrations lumineuses qui se succèdent l'une à l'autre dans une seconde de temps, on obtiendra sans peine, pour les rayons

$B, C, D, E, F, G, H,$

de *Frauenhofer*, les valeurs de

$k, \ T, \ N$ et $s,$

et de leurs logarithmes, données les par le tableau suivant.

II. TABLEAU.

Valeurs de k, T, N, s.

Indication des rayons.	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
$L(l)$	8376128	8173198	7700674	7210809	6852184	9326374	5942755
$L\left(\frac{1}{l}\right)$	1623872	1826802	2299326	2789191	3147816	3673629	4057245
$L(2\pi)$	7981799	7981799	7981799	7981799	7981799	7981799	7981799
logarithme de $k = \frac{2\pi}{l}$	9605671	9808601	0281125	0770990	1129615	1655125	2039014
$L(l)$	8379128	8173198	7700671	7210809	6852184	6326374	5942755
$L(\Omega)$	4918103	4916103	4916103	4916103	4916103	4916103	4916103
logarithme de $T = \frac{l}{\Omega}$	3160025	3257095	2784574	2294706	1936081	1410271	1026652
logarithme de $N = \frac{1}{T}$	6539975	6742905	7215429	7705294	8063919	8589729	8973348
$L(2\pi)$	7981799	7981799	7981799	7981799	7981799	7981799	7981799
logarithme de $s = \frac{2\pi}{T}$	4521774	4721704	5197228	5687093	6045718	6671528	6955147
$\frac{1}{1000}k$	9132	9569	10669	11943	12971	14910	15892
$(1000000)^3 T$	2218	2117	1899	1696	1562	1381	1267
$\frac{10}{(1000000)^2} N$	4508	4724	5267	5896	6403	7227	7895
$\frac{1}{(1000000)^2} s$	2833	2968	3309	3704	4023	4541	4960

En égalant les nombres que renferment, dans le 2e tableau, les quatre dernières lignes horizontales aux produits placés en avant de ces mêmes lignes, on en conclut immédiatement les valeurs de k, T, N, s, relatives aux divers rayons. Ainsi, par exemple, de ce que pour le rayon B le produit

$$\frac{10}{(1000000)^2}N,$$

est sensiblement égal à 4508, il résulte que le nombre des vibrations lumineuses accomplies dans ce rayon en une seconde de temps est la dixième partie de 4508 millions de millions, de sorte que pendant ce court intervalle environ 451 millions de millions de vibrations se succèdent l'une à l'autre. Pour obtenir la durée de chacune de ces vibrations, il faudra égaler le produit

$$(1000000)^2\,T$$

au nombre 2218, et par suite la durée de chaque vibration, dans le rayon B, sera représentée par la fraction

$$\frac{2218}{(1000000)^2} \tag{45}$$

qui est un peu plus grande que

$$\frac{2}{1000\,(1000000)^2}. \tag{46}$$

Si au rayon B on substituait le rayon C ou D, il faudrait à la fraction (45) substituer le rapport

$$\frac{2117}{(1000000)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1899}{(1000000)^2}$$

qui différerait encore très peu de la fraction (46). Donc, si l'on partage une seconde de temps en mille millions de millions de parties égales, deux de ces parties représenteront à très peu près la durée d'une vibration lumineuse dans les rayons B, C, D placés vers l'extrémité rouge du spectre solaire. Cette durée ne surpasserait que d'un quart environ l'une des mêmes parties dans le rayon situé vers l'extrémité opposée du spectre parmi les rayons violets.

Les épaisseurs des ondes relatives aux couleurs principales du spectre solaire, et aux limites de ces couleurs, ont été déterminées par *Fresnel* avec une grande précision. Ces épaisseurs, exprimées en millionièmes de millimètre sont telles que les présente le tableau suivant.

III. TABLEAU.

Valeurs de l, exprimées en millionièmes de millimètres.

Limites des couleurs principales.		Couleurs principales.	
violet extrême	406	violet	423
violet indigo	439	indigo	449
indigo bleu	459	bleu	475
bleu vert	492	vert	511
vert jaune	532	jaune	551
jaune orangé	571	orangé	583
orangé rouge	596	rouge	620
rouge extrême	645		

Les valeurs précédentes de l, mesurées dans l'air, ne seront pas sensiblement altérées, si l'on passe de l'air dans le vide. Car ce passage, en les faisant varier dans le rapport de 1 à 1,000276, n'ajoutera pas même à chacune d'elles le tiers de sa millième partie. En les divisant par la vitesse Ω de la lumière dans le vide, on obtiendra, pour les couleurs principales et pour leurs limites, les durées des vibrations de l'éther. Ces durées seront comparables à l'intervalle de temps insensible qui résulte de la division d'une seconde sexagésimale en mille millions de millions de parties égales, et leurs rapports avec ce même intervalle se trouveront exprimés par les nombres que renferme le tableau que nous allons tracer.

IV. TABLEAU.

Rapports entre les durées des vibrations de l'éther et la $\frac{1}{1000000000000000}$*e* *partie d'une seconde sexagésimale.*

Limites des couleurs principales.		Couleurs principales.	
violet extrême	1,28	violet	1,36
violet indigo	1,42	indigo	1,45
indigo bleu	1,48	bleu	1,53
bleu vert	1,59	vert	1,65

Suite du 4e tableau.

Limites des couleurs principales.		Couleurs principales.	
vert jaune	1,72	jaune	1,78
jaune orangé	1,81	orangé	1,88
orangé rouge	1,92	rouge	2,00
rouge extrême	2,08		

En divisant l'unité par les rapports inscrits dans le quatrième tableau, et multipliant les quotients obtenus par mille, on parviendra aux nombres qui expriment combien de millions de millions de vibrations successives s'exécutent pour une couleur donnée dans un seconde de temps. Ces nombres sont ceux que présente le tableau suivant.

V. TABLEAU.

Nombres qui expriment combien de millions de millions de vibrations successives s'effectuent en une seconde sexagésimale.

Limites des couleurs principales.		Couleurs principales.	
violet extrême	764	violet	735
violet indigo	707	indigo	691
indigo bleu	676	bleu	653
bleu vert	630	vert	607
vert jaune	583	jaune	563
jaune orangé	543	orangé	532
orangé rouge	520	rouge	500
rouge extrême	481		

Ainsi, dans le rayon rouge du spectre solaire, les molécules de l'éther effectuent environ cinqcent millions de millions de vibrations par seconde. A ce nombre prodigieux il faut ajouter presque sa moitié pour obtenir le nombre des vibrations par seconde dans le rayon violet. Au reste on peut déterminer approximativement le nombre des vibrations que présentent les rayons placés vers le milieu du spectre solaire, en opérant comme il suit.

En une seconde sexagésimale, les vibrations des molécules d'éther renfermées dans une onde plane, se transmettent aux molécules que renferment d'autres ondes com-

prises entre des plans parallèles jusqu'à une distance d'environ 80 mille lieues, de telle sorte que les vibrations commencent dans la deuxième onde, quand elles s'achèvent dans la première, qu'elles commencent dans la troisième quand elles s'achèvent dans la deuxième, et ainsi de suite. Or les diverses ondes étant contigues le unes aux autres, il suit de ce qu'on vient de dire que, pour obtenir la durée de la vibration des molécules éthérées dans une seule onde il faudra diviser une seconde sexagésimale en autant de parties qu'il y a d'épaisseurs d'ondes dans une distance de 80 mille lieues. D'ailleurs chacune des lieues que l'on considére ici est de 2000 toises ou environ 4000 mètres, chaque mètre se compose de 1000 millimètres, et il résulte du 3e tableau que l'épaisseur d'une onde, pour les rayons placés vers le milieu du spectre, est d'environ un demi-millième de millimètre, et qu'en conséquence chaque millimètre renferme environ 2000 épaisseurs semblables. Donc le nombre des vibrations exécutées par les molécules d'éther dans une seule onde plane et en une seconde de temps, pour les rayons situés vers le milieu du spectre, sera sensiblement égal au produit des facteurs

80000, 4000, 1000 et 2000

c'est à dire à

640000000000000,

ou à 640 millions de millions. Il résulte du 2e et du 5e tableau que ce dernier nombre représente effectivement le nombre des vibrations par seconde dans le rayon F de *Frauenhofer* qui est un rayon bleu situé dans le spectre solaire vers la limite du bleu et du vert.

Les nombres compris dans le 5e tableau diffèrent de ceux que l'on trouve dans le traité de M. *Herschel* sur la lumière. En recherchant la cause de cette différence, j'ai reconnu qu'elle devait être principalement attribuée à ce que les épaisseurs d'onde ou longueurs d'ondulation adoptées par cet auteur, et relatives aux diverses couleurs ou à leurs limites, diffèrent assez notablement des valeurs de l inscrites dans le 3e tableau et données par *Fresnel*.

En terminant ce paragraphe nous ferons observer que, dans les milieux qui ne dispersent pas les couleurs, les valeurs de k relatives à deux rayons différents conservent entre elles, en vertu de la formule (7), le même rapport que les deux valeurs correspondantes de s. Ce rapport est donc, ainsi que les valeurs de s, indépendant de la nature du milieu que l'on considère, pourvu que la dispersion soit nulle; en sorte qu'il reste le même, par exemple, dans le vide et dans l'air atmospherique. On peut en dire autant du rapport entre deux valeurs diverses de l, qui est toujours l'inverse du rapport entre les valeurs correspondantes de k. Si, pour fixer les idées, on divise successivement la valeur l_1 de l qui répond au rayon B de *Frauenhofer* par les valeurs de l relatives aux autres rayons, c'est à dire, par les quantités

$l_2,\ l_3,\ l_4,\ l_5,\ l_6,\ l_7,$

on trouvera pour quotients les nombres dont les logarithmes sont

(47) 0202930 0675454 1165319 1523944 2049754 2433373

c'est à dire, les nombres

(48) 1,0478 1,1683 1,3078 1,4203 1,6032 1,7512.

Or ces derniers nombres représenteront dans l'air et dans le vide, non seulement les valeurs des rapports

(49) $$\frac{l_1}{l_2},\ \frac{l_1}{l_3},\ \frac{l_1}{l_4},\ \frac{l_1}{l_5},\ \frac{l_1}{l_6},\ \frac{l_1}{l_7},$$

mais encore celles des rapports

(50) $$\frac{k_2}{k_1},\ \frac{k_3}{k_1},\ \frac{k_4}{k_1},\ \frac{k_5}{k_1},\ \frac{k_6}{k_1},\ \frac{k_7}{k_1},$$

ou même des suivants

(51) $$\frac{s_2}{s_1},\ \frac{s_3}{s_1},\ \frac{s_4}{s_1},\ \frac{s_5}{s_1},\ \frac{s_6}{s_1},\ \frac{s_7}{s_1}.$$

---

§. 10. *Considérations nouvelles sur la réfraction de la lumière.*

Les loix de la réfraction simple, telles que l'expérience les donne, se trouvent comprises dans les formules (8) et (9) du §. 5. Or, il est important d'observer que la méthode, à l'aide de la quelle nous avons établi ces formules, les reproduira encore, si l'on suppose que les valeurs des déplacements ξ, η, ζ relatives soit au premier, soit au second milieu, et tirées en conséquence soit des équations (1), soit des équations (2), fournissent, pour les points situés sur la surface de séparation, des valeurs égales d'une fonction linéaire quelconque de ces mêmes déplacements et de leurs dérivées prises par rapport aux variables indépendantes x, y, t. En effet designons par 8 la fonction linéaire dont il s'agit. Si l'on y substitue les valeurs de ξ, η, ζ qui représentent les déplacements moléculaires dans le rayon incident, c'est à dire, les valeurs de ξ, η, ζ données par les équations (33) du § 4, 8 deviendra une fonction linéaire des sinus et cosinus de l'arc

$$k(x\cos\tau + y\sin\tau) - st$$

ensorte qu'on aura, par exemple

(1) $$8 = \mathfrak{E}\cos(k(x\cos\tau + y\sin\tau) - st) + \mathfrak{F}\sin(k(x\cos\tau + y\sin\tau - st)),$$

les coefficients $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ etant uniquement fonctions des quantités

(2) $$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ s,\ k,\ \cos\tau,\ \sin\tau.$$

Soient maintenant

$$\mathfrak{E}_1,\ \mathfrak{F}_1 \quad \text{ou} \quad \mathfrak{E}',\ \mathfrak{F}'$$

ce que deviement les coefficients

$$\mathfrak{E},\ \mathfrak{F}$$

quand passe du rayon incident au rayon réfléchi ou réfracté, c'est à dire, quand on remplace les quantités (2) par les suivantes

(3) $\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{D}_1,\ s,\ k,\ -\cos\tau,\ \sin\tau$

ou par

(4) $\mathfrak{A}',\ \mathfrak{B}',\ \mathfrak{C}',\ \mathfrak{D}',\ s',\ k',\ \cos\tau',\ \sin\tau'$,

En considérant à la fois les deux systèmes d'ondes propagées dans le premier milieu, on devra, pour ce milieu, remplacer la formule (1) par la suivante

(5) $$\varepsilon = \mathfrak{E}\cos(k(x\cos\tau + y\sin\tau) - st) + \mathfrak{F}\sin(k(x\cos\tau + y\sin\tau) - st)$$
$$+ \mathfrak{E}_1\cos(k(-x\cos\tau - y\sin\tau) - st) + \mathfrak{F}_1\sin(k(-x\cos\tau + y\sin\tau) - st),$$

tandis qu'on trouvera par le second milieu

(6) $$\varepsilon = \mathfrak{E}'\cos(k'(x\cos\tau' + y\sin\tau') - s't) + \mathfrak{F}'\sin(k'(x\cos\tau' + y\sin\tau') - s't).$$

Si maintenant l'on suppose que les deux valeurs précédentes de ε deviennent égales entre elles pour les points situés sur la surface de séparation des deux milieux, et correspondants à $x = 0$, on aura

(7) $$\begin{cases} (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_1)\cos(ky\sin\tau - st) + (\mathfrak{F} + \mathfrak{F}_1)\sin(ky\sin\tau - st) \\ = \mathfrak{E}'\cos(k'y\sin\tau' - s't) + \mathfrak{F}'\sin(k'y\sin\tau' - s't). \end{cases}$$

Or, cette dernière équation devant subsister indépendamment des valeurs attribuées aux variables y et t, les coefficients des puissances semblables de y et de t devront être égaux dans les deux membres développés en séries convergentes ordonnées suivant les puissances dont il s'agit ; et de cette seule considération l'on déduira immédiatement les formules

(8) $$\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}',\quad \mathfrak{F} + \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}'$$

(9) $$k\sin\tau = k'\sin\tau',\quad s = s',$$

auxquelles on parvient encore très simplement de la manière suivante.

Si dans l'équation (7) on pose pour abréger

(10) $$ky\sin\tau - st = Y,\quad t = \frac{1}{s}(Y - ky\sin\tau),$$

on obtiendra la formule

(11) $$\begin{cases} (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_1)\cos Y + (\mathfrak{F} + \mathfrak{F}_1)\sin Y \\ = \mathfrak{E}'\cos\left\{\frac{s'}{s}Y + (k'\sin\tau' - \frac{s'}{s}k\sin\tau)y\right\} + \mathfrak{F}'\sin\left\{\frac{s'}{s}Y + (k'\sin\tau' - \frac{s'}{s}k\sin\tau)y\right\}; \end{cases}$$

qui devra subsister à son tour, quelles que soient les valeurs de Y et de y. Or, le premier membre étant indépendant de y, le second devra l'être pareillement ; ce qui entraine la condition

(12) $$k'\sin\tau' = \frac{s'}{s}k\sin\tau.$$

Cela posé, la formule (11) deviendra

(13) $$(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_1)\cos Y + (\mathfrak{F} + \mathfrak{F}_1)\sin Y = \mathfrak{E}'\cos\left(\frac{s'}{s}Y\right) + \mathfrak{F}'\sin\left(\frac{s'}{s}Y\right),$$

et, comme en remplaçant Y par — Y on en tirera

$$(14)\qquad (\mathfrak{E}+\mathfrak{E}_1)\cos Y-(\mathfrak{F}+\mathfrak{F}_1)\sin Y=\mathfrak{E}'\cos\left(\frac{s'}{s}Y\right)-\mathfrak{F}'\sin\left(\frac{s'}{s}Y\right),$$

on aura encore

$$(15)\qquad (\mathfrak{E}+\mathfrak{E}_1)\cos Y=\mathfrak{E}'\cos\left(\frac{s'}{s}Y\right),\qquad (\mathfrak{F}+\mathfrak{F}_1)\sin Y=\mathfrak{F}'\sin\left(\frac{s'}{s}Y\right).$$

Si maintenant on réduit Y à zéro dans la première des formules (15), elle donnera

$$(16)\qquad \mathfrak{E}+\mathfrak{E}_1=\mathfrak{E}'.$$

Donc cette formule donnera généralement

$$(17)\qquad \cos Y=\cos\left(\frac{s'}{s}Y\right).$$

Cette dernière devant subsister, quel que soit Y, entraînera l'équation

$$(18)\qquad s'=s,$$

qui réduira le seconde des formules (15) à

$$(19)\qquad \mathfrak{F}+\mathfrak{F}_1=\mathfrak{F}'$$

et l'équation (12) à

$$(20)\qquad k'\sin\tau'=k\sin\tau.$$

On se trouve ainsi ramené aux équations (8) et (9), dont les deux dernières coïncident avec les formules (8) et (9) du § 5.

En supposant que la fonction linéaire 8 des déplacements ξ, η, ζ et de leurs dérivées relatives à x, y, t se réduise simplement à la variable ξ, on ferait coïncider les équations (8) avec les formules (7) du § 4. Mais adopter ces formules, ce serait admettre, comme nous l'avons déjà observé, que l'on peut sans erreur sensible ne pas tenir compte des altérations produites par le voisinage du second milieu dans la valeur de ξ que détermine la première des équations (1) du § 4, ou par le voisinage du premier milieu dans la valeur de ξ que détermine la première des équations (2) du même paragraphe. A la vérité, en prenant successivement pour 8 la variable ξ, ou, ce qui revient au même, la vitesse $\frac{d\xi}{dt}$, puis la composante, parallèle à l'axe des x, de la pression supportée par un plan perpendiculaire à cet axe, puis enfin les composantes, parallèles aux axes des y et z, de la pression supportée par un plan perpendiculaire à l'axe des z, on déduirait immédiatement des équations (8) celles que j'ai données dans le bulletin des sciences de M. *de Férussac* pour l'année 1830, et qui s'accordent si bien avec les formules et les expériences de *Fresnel*, quand on suppose que la densité de l'éther reste la même dans tous les milieux. Mais les principes développés dans le § 9 ne nous permettent plus d'adopter cette dernière hypothèse; et d'ailleurs il n'est pas suffisamment démontré que la variable ξ et les pressions ci-dessus mentionnées doivent, dans le voisinage de la surface de sé-

paration de deux milieux, conserver la même valeur, tandisqu'on passe de l'un à l'autre. Des recherches approfondies sur ce sujet délicat m'ont conduit à un nouveau principe de mécanique propre à fournir, dans plusieurs questions de physique mathématique, les conditions relatives aux limites des corps et aux surfaces qui terminent des systèmes de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. Ce principe que je développerai dans un autre mémoire, étant appliqué à la théorie de la lumière, on en conclut que, dans le voisinage de la surface de séparation de deux milieux, les déplacements ξ, η, ζ des molécules d'éther, relatifs soit au premier milieu, soit au second, devront fournir les mêmes valeurs de υ, si l'on prend pour υ l'une quelconque des trois fonctions

$$(21) \qquad \frac{d\eta}{dz}-\frac{d\zeta}{dy},\quad \frac{d\zeta}{dx}-\frac{d\xi}{dz},\quad \frac{d\xi}{dy}-\frac{d\eta}{dx},$$

ou bien encore si l'on suppose

$$(22) \quad \upsilon=a^2\frac{d\xi}{dx}+b^2\frac{d\eta}{dy}+c^2\frac{d\zeta}{dz}+bc\left(\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}\right)+ca\left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right)+ab\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right),$$

a, b, c désignant les cosinus des angles formés par la normale à la surface de séparation des deux milieux avec les demi-axes des coordonnées positives. Il est bon d'observer que la valeur de υ, déterminée par l'équation (22), représente la dilatation linéaire de l'éther mesurée suivant cette même normale.

Lorsque, les deux milieux étant séparés l'un de l'autre par le plan des y z, on suppose l'axe des z parallèle aux plans des ondes lumineuses, et par conséquent perpendiculaire au plan d'incidence, on a dans la formule (22)

$$a=\pm 1,\quad b=0,\quad c=0,$$

et de plus ξ, η, ζ deviennent indépendants de z. Donc alors en changeant, ce qui est permis, le signe de la première des différences (21), on trouvera que les fonctions (21) et (22) peuvent être réduites à

$$(23) \qquad \frac{d\zeta}{dy},\quad \frac{d\zeta}{dx},\quad \frac{d\xi}{dy}-\frac{d\eta}{dx},\quad \frac{d\xi}{dx}.$$

Donc, si l'on nomme ξ', η', ζ' ce que deviennent les déplacements ξ, η, ζ tandisque l'on passe du premier milieu au second, on aura, pour les points situés sur la surface de séparation, c'est à dire, pour $x=0$,

$$(24) \qquad \frac{d\xi}{dx}=\frac{d\xi'}{dx},\quad \frac{d\xi}{dy}-\frac{d\eta}{dx}=\frac{d\xi'}{dx}-\frac{d\eta'}{dx},\quad \text{et}$$

$$(25) \qquad \frac{d\zeta}{dx}=\frac{d\zeta'}{dx},\quad \frac{d\zeta}{dy}=\frac{d\zeta'}{dy}.$$

Lorsque dans les équations (24) et (25) on substitue à ξ, η, ζ les seconds membres des formules (1) du § 5, et à ξ', η', ζ' les seconds membres des formules (2) du même paragraphe, on obtient les loix de la réflexion et de la réfraction qui ont lieu à la surface des corps transparents, avec les diverses formules que contiennent les deux lettres adressées à M. *Libri* les 19 et 27 mars, et imprimées dans le n° 14 des comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, pour l'année 1836. On déduit aussi des conditions (24) et (25) les loix de la réflexion opérée par la surface extérieure d'un corps opaque, ou par la surface intérieure d'un corps transparent, dans le cas où l'angle d' incidence devient assez considérable pour qu'il n'y ait plus de lumière transmise, c'est à dire, dans le cas où la réflexion devient totale. (Voir à ce sujet les deux lettres que j'ai adressées à M. *Ampère* les 1er et 16. avril 1836). Comme je l'ai montré dans ces différentes lettres, les formules auxquelles conduisent les conditions (24) et (25) non seulement déterminent l' intensité de la lumière polarisée rectilignement par réflexion ou par réfraction et les plans de polarisation des rayons réfléchis ou réfractés, mais encore elle font connaitre les diverses circonstances de la polarisation circulaire ou elliptique produite par la réflexion totale ou par la réflexion opérée à la surface d'un corps opaque, et en particulier, d'un métal. D'ailleurs les divers résultats de notre analyse se trouvent d'accord avec les loix déjà connues, particulièrement avec les formules proposées par MM. *Fresnel* et *Brewster*, ainsi qu' avec les observations de tous les physiciens. Au reste je reviendrai sur ces résultats dans de nouveaux mémoires, où je déduirai directement des équations (15) du § 1 les loix des divers phénomènes lumineux, y compris les phénomènes de l' ombre et de la diffraction.

---

§. 11. *Sur la relation qui existe entre la vitesse de propagation de la lumière et l'épaisseur des ondes lumineuses.*

Pour une couleur donneé, la durée T des vibrations lumineuses, ou, ce qui revient au même, la quantité

(1) $$s = \frac{2\pi}{T}$$

reste la même dans les différents milieux. Mais l'épaisseur l des ondes lumineuses, aussi appellée longueur d'ondulation, et par suite le rapport

(2) $$k = \frac{2\pi}{l}$$

devront, si l'on adopte la théorie exposée dans ce mémoire, se trouver liés à la vitesse de propagation

(3) $$\Omega = \frac{s}{k}$$

par la formule (1) ou (5) du § 6, c'est à dire, par l'équation

(4) $$\frac{s^2}{k^2} = \Omega^2 = a_1 + a_2 k^2 + a_3 k^4 + \text{etc.} \ldots .$$

en vertu de laquelle Ω^2 se développera en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de k. D'ailleurs, en posant comme dans le § 6,

(5) $$b_1 = \frac{1}{a_1},\ \ b_2 = -\frac{a_2}{a_1^3},\ \ b_3 = \frac{2a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^5},\ \text{etc.}$$

on tirera de l'équation (4)

(6) $$k^2 = b_1 s^2 + b_2 s^4 + b_3 s^6 + \text{etc.} \ldots .$$

Les coefficients a_1, a_2, a_3, ... b_1, b_2, b_3 ..., que renferment les seconds membres des équations (4) et (5), dépendent de la nature du milieu dans lequel se propage la lumière: les quantités k, Ω dépendent en outre de la valeur attribuée à s, c'est à dire, de la couleur. Dans le vide, et dans les milieux qui ne dispersent pas les couleurs, par exemple, dans l'air atmosphérique, les coefficients

$$a_2,\ a_3,\ \ldots .\ \ b_2,\ b_3,\ \ldots .$$

s'évanouissent; alors la formule (4) réduite à

(7) $$\frac{s^2}{k^2} = \Omega^2 = a_1,$$

exprime que la vitesse de propagation Ω est indépendante de s, et s^2 proportionel à k^2.

Concevons maintenant que, les valeurs de k et de Ω étant relatives à l'air atmosphérique, on désigne par

(8) $$k' = \theta k,$$

ce que devient la quantité k lorsqu'on substitue à l'air un autre milieu. La valeur de θ déterminée par l'équation (8), ou, ce qui revient au même, par l'équation (16) du § 5, ne sera autre chose que l'indice de réfraction d'un rayon lumineux qui passerait de l'air dans le nouveau milieu que l'on considère; et la formule (6) deviendra

$$(9) \qquad k'^2 = \theta^2 k^2 = b_1 s^2 + b_2 s^4 + b_3 s^6 + \text{etc.}\ldots$$

Si dans cette dernière formule on remplace s par sa valeur tirée de l'équation (3), on trouvera

$$(10) \qquad \theta^2 = b_1 \Omega^2 + b_2 \Omega^4 s^2 + b_3 \Omega^6 s^4 + \text{etc.}\ldots\ldots$$

Donc, en posant pour abréger

$$(11) \qquad b_1 \Omega^2 = a, \quad b_2 \Omega^4 = b, \quad b_3 \Omega^6 = c, \quad \text{etc.}\ldots\ldots$$

on aura simplement

$$(12) \qquad \theta^2 = a + b s^2 + c s^4 + \text{etc.}\ldots\ldots$$

On ne doit pas oublier que dans les formules (10), et (11) Ω représente la vitesse de propagation de la lumière dans l'air, vitesse qui reste la même pour toutes les couleurs.

Soient maintenant

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7$$

es valeurs de θ relatives aux rayons

$$B, C, D, E, F, G, H$$

de *Frauenhofer*, et

$$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7$$

les valeurs correspondantes de s. Si l'on désigne par i l'un quelconque des nombres entiers

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,

et si l'on pose en outre

$$(13) \qquad \Theta_i = \theta_i^2,$$

la formule (12) donnera

$$(14) \qquad \Theta_i = a + b s_i^2 + c s_i^4 + \text{etc.}\ldots$$

Or, il résulte des calculs développés dans les paragraphes 6, 7, 8 qu'on peut, sans erreur sensible, réduire le second membre de l'équation (4) ou (6), et par conséquent le second membre de la formule (14) à ses quatre premiers termes. Donc cette formule pourra s'écrire comme il suit

$$(15) \qquad \Theta_i = a + b s_i^2 + c s_i^4 + b s_i^6.$$

D'autre part on pourra encore négliger $\Delta^4 \Theta_i$ dans le premier membre de la formule (11) du § 7, et réduire cette formule à

$$(16)\qquad \Theta_i = \Theta + (U' - \Theta)\beta_i + [U'' - \Theta - (U' - \Theta)\,\mathrm{S}''\beta_i]\,\gamma_i$$
$$+ \{U''' - \Theta - (U' - \Theta)\,\mathrm{S}'''\beta_i - [U'' - \Theta - (U' - \Theta)\,\mathrm{S}''\beta_i]\,\mathrm{S}''\gamma_i\}\,\delta_i,$$

les valeurs de

$$\Theta,\ U',\ U'',\ U'''$$

etant celles que fournissent les équations (10) et (6) du § 7, savoir,

$$(17)\qquad \begin{cases} \Theta = \dfrac{1}{7}\mathrm{S}\,\Theta_i = \dfrac{\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 + \Theta_5 + \Theta_6}{7}, \\ U' = \mathrm{S}'\,\Theta_i = \quad \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 - \Theta_5 - \Theta_6 - \Theta_7, \\ U' = \mathrm{S}''\,\Theta_i = -\Theta_1 - \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 + \Theta_5 + \Theta_6 - \Theta_7, \\ U'' = \mathrm{S}'''\,\Theta_i = -\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 - \Theta_4 - \Theta_5 + \Theta_6 + \Theta_7; \end{cases}$$

et l'on tirera de ces dernières équations combinées avec la formule (14)

$$(18)\qquad \begin{cases} \Theta = \mathfrak{a} + \dfrac{\mathfrak{b}}{7}\mathrm{S}\,s_i^2 + \dfrac{\mathfrak{c}}{7}\mathrm{S}\,s_i^4 + \dfrac{\mathfrak{d}}{7}\mathrm{S}\,s_i^6, \\ U' = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\,\mathrm{S}'\,s_i^2 + \mathfrak{c}\,\mathrm{S}'\,s_i^4 + \mathfrak{d}\,\mathrm{S}'\,s_i^6, \\ U'' = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\,\mathrm{S}''\,s_i^2 + \mathfrak{c}\,\mathrm{S}''\,s_i^4 + \mathfrak{d}\,\mathrm{S}''\,s_i^6, \\ U''' = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\,\mathrm{S}'''\,s_i^2 + \mathfrak{c}\,\mathrm{S}'''\,s_i^4 + \mathfrak{d}\,\mathrm{S}'''\,s_i^6, \end{cases}$$

les notations $\mathrm{S}\,s_i^2$, $\mathrm{S}'s_i^2$, $\mathrm{S}''s_i^2$, $\mathrm{S}'''s_i^2$; $\mathrm{S}\,s_i^4$, etc. . . . expriment ce que deviennent les sommes designées par $\mathrm{S}\Theta_i$, $\mathrm{S}'\Theta_i$, $\mathrm{S}''\Theta_i$, $\mathrm{S}'''\Theta_i$ dans les équations (17), quand on y remplace Θ_i par S_i^2, ou par S_i^4, etc. . . . Enfin, il est clair que la substitution des valeurs de

$$\Theta_i,\ \Theta,\ U',\ U'',$$

fournies par les équations (15) et (18), transformera les deux membres de l'équation (16) en deux fonctions linéaires des quantités

$$(19)\qquad \mathfrak{a},\ \ \mathfrak{b},\ \ \mathfrak{c},\ \ \mathfrak{d}$$

qui varient avec la nature du milieu réfringent. Or, ces deux fonctions devant être égales entre elles, quel que soit le milieu réfringent, on peut en conclurre que dans l'une et l'autre les coefficients des quantités (19) devront être les mêmes. Par suite, l'équation (16) devra continuer de subsister, si dans cette équation, et dans les formules (17), on remplace Θ_i par l'une quelconque des quatre quantités

$$(20)\qquad 1,\ \ s_i^2,\ \ s_i^4,\ \ s_i^6,$$

ce qui revient à supposer, dans les formules (15) et (18), l'une des quantités $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ réduite à l'unité, et les trois autres à zéro.

Remplacer Θ_i par l'unité, c'est substituer l'air au milieu qui devait réfracter la lumière. Alors on trouve non seulement $\Theta_i = 1$, mais aussi

$$\Theta = U' = U'' = U''' = 1,$$

et l'équation (16) devient identique, comme on l'a déjà remarqué (page 153).

Remplaçons maintenant, dans l'équation (16), Θ_i par s_i^n, n designant l'un de trois nombres entiers 2, 4, 6; et faisons pour abréger

$$(21)\quad \begin{cases} \varsigma = \frac{1}{7}\,\mathrm{S}\, s_i^n = \dfrac{s_1^n + s_2^n + s_3^n + s_4^n + s_5^n + s_6^n + s_7^n}{7}, \\ \varsigma' = \mathrm{S}'\, s_i^n = \quad s_1^n + s_2^n + s_3^n + s_4^n - s_5^n - s_6^n - s_7^n, \\ \varsigma'' = \mathrm{S}''\, s_i^n = - s_1^n - s_2^n + s_3^n + s_4^n + s_5^n + s_6^n - s_7^n, \\ \varsigma''' = \mathrm{S}'''\, s_i^n = - s_1^n + s_2^n + s_3^n - s_4^n - s_5^n + s_6^n + s_7^n : \end{cases}$$

l'équation (16), jointe aux formules (17), donnera

$$(22)\quad \begin{aligned} s_i^n = \varsigma + (\varsigma' - \varsigma)\,\beta_i + [\varsigma'' - \varsigma - (\varsigma' - \varsigma)\,\mathrm{S}''\beta_i]\,\gamma_i \\ + \{\varsigma''' - \varsigma - (\varsigma' - \varsigma)\,\mathrm{S}'''\beta_i - [\varsigma'' - \varsigma - (\varsigma' - \varsigma)\,\mathrm{S}''\beta_i]\,\mathrm{S}'''\gamma_i\}\,\delta_i. \end{aligned}$$

L'équation (22) fournira pour s_i^n des valeurs approchées de divers ordres, si l'on réduit le polynome que renferme le second membre au seul terme ς, ou à la somme de ses deux, trois, quatre premiers termes; et, si l'on nomme

$$\Delta s_i^n,\quad \Delta^2 s_i^n,\quad \Delta^3 s_i^n,\quad \Delta^4 s_i^n$$

les différences finies des divers ordres qui doivent compléter les valeurs approchées dont il s'agit, on aura rigoureusement

$$(23)\quad \begin{aligned} s_i^n &= \varsigma + \Delta s_i^n, \\ &= \varsigma + (\varsigma' - \varsigma)\,\beta_i + \Delta^2 s_i^n, \\ &= \varsigma + (\varsigma' - \varsigma)\,\beta_i + [\varsigma'' - \varsigma - (\varsigma' - \varsigma)\,\mathrm{S}''\beta_i]\,\gamma_i + \Delta^3 s_i^n, \\ &= \varsigma + (\varsigma' - \varsigma)\,\beta_i + [\varsigma'' - \varsigma - (\varsigma' - \varsigma)\,\mathrm{S}''\beta_i]\,\gamma_i \\ &\quad + \{\varsigma''' - \varsigma - (\varsigma' - \varsigma)\,\mathrm{S}'''\beta_i - [\varsigma'' - \varsigma - (\varsigma' - \varsigma)\,\mathrm{S}''\beta_i]\,\mathrm{S}''\gamma_i\}\,\delta^i + \Delta^4 s_i^n \end{aligned}$$

On trouvera par suite

$$(24)\quad \begin{cases} \Delta s_i^n = s_i^n - \varsigma, \\ \Delta^2 s_i^n = s_i^n - \varsigma - (\varsigma' - \varsigma)\,\beta_i, \\ \Delta^3 s_i^n = s_i^n - \varsigma - (\varsigma' - \varsigma)\,\beta_i - [\varsigma'' - \varsigma - (\varsigma' - \varsigma)\,\mathrm{S}''\beta_i]\,\gamma_i ; \end{cases}$$

puis, on en conclurra

$$\mathrm{S}'\Delta s_i^n = \mathrm{S}'(s_i^n - \varsigma) = \mathrm{S}' s_i^n - \varsigma, \text{ etc.} \ldots.$$

ou, ce qui revient au même

$$(25)\quad \begin{cases} S'\,\Delta s_i^n = \varsigma' - \varsigma, \\ S''\Delta^2 s_i^n = \varsigma'' - \varsigma - (\varsigma' - \varsigma)\, S''\beta_i, \\ S'''\Delta^3 s_i^n = \varsigma''' - \varsigma - (\varsigma' - \varsigma)\, S'''\beta_i - [\varsigma'' - \varsigma - (\varsigma' - \varsigma)\, S'''\gamma_i, \end{cases}$$

de sorte que la formule (23) donnera

$$\begin{aligned} (26)\qquad s_i^n &= \tfrac{1}{7}\,S\,s_i^n + \Delta s_i^n, \\ &= \tfrac{1}{7}\,S\,s_i^n + \beta_i S'\Delta s_i^n + \Delta^2 s_i^n \\ &= \tfrac{1}{7}\,S\,s_i^n + \beta_i S'\Delta s_i^n + \gamma_i S''\Delta^2 s_i^n + \Delta^3 s_i^n, \\ &= \tfrac{1}{7}\,S\,s_i^n + \beta_i S'\Delta s_i^n + \gamma_i S''\Delta^2 s_i^n + \delta_i S'''\Delta^3 s_i^n + \Delta^4 s_i^n, \end{aligned}$$

et pourra être remplacée par le système des équations

$$(27)\quad \begin{cases} s_i^n = \tfrac{1}{7}\,S\,s_i^n + \Delta s_i^n, \quad \Delta s_i^n = \beta_i S'\Delta s_i^n + \Delta^2 s_i^n, \quad \Delta^2 s_i^n = \gamma_i S''\Delta^2 s_i^n + \Delta^3 s_i^n, \\ \Delta^3 s_i^n = \delta_i S'''\Delta^3 s_i^n + \Delta^4 s_i^n. \end{cases}$$

De plus la formule (22), réduite à

$$(28)\qquad s_i^n = \tfrac{1}{7}\,S\,s_i^n + \beta_i S'\Delta s_i^n + \gamma_i S''\Delta^2 s_i^n + \delta_i S'''\Delta^3 s_i^n,$$

fournira précisément pour s_i^n le valeur que l'on tirerait de l'équation (26), ou des équations (27), en y posant

$$(29)\qquad \Delta^4 s_i^n = 0.$$

On tire des équations (2) et (3)

$$(30)\qquad s = \Omega k = 2\pi\Omega l^{-1}.$$

Si, dans cette dernière formule on suppose Ω, k et l relatifs à l'air atmosphérique, la valeur de Ω sera la même pour toutes les couleurs, et en désignant par

$$k_i, \quad l_i$$

les valeurs de k, l relatives à $s = s_i$ on trouvera

$$(31)\qquad s_i = \Omega k_i = 2\pi\Omega l_i^{-1}$$

par conséquent

$$(32)\qquad s_i^n = \Omega^n k_i^n = (2\pi\Omega)^n l_i^{-n}.$$

Soient maintenant Δk_i^n, $\Delta^2 k_i^n$, ... Δl_i^{-n}, $\Delta^2 l_i^{-n}$, etc. .... ce que deviennent les différences Δs_i^n, $\Delta^2 s_i^n$, ... déterminées par le système des équations (27), quand on remplace dans ces équations s_i^n par k_i^n ou par l_i^{-n}. On aura

$$(33)\quad \begin{cases} k_i = \tfrac{1}{7}\,S\,k_i^n + \Delta k_i^n, \quad \Delta k_i^n = \beta_i S'\Delta k_i^n + \Delta^2 k_i^n, \quad \Delta^2 k_i^n = \gamma_i S''\Delta^2 k_i^n + \Delta^3 k_i^n, \\ \Delta^3 k_i^n = \delta_i S'''\Delta^3 k_i^n + \Delta^4 k_i^n, \end{cases}$$

$$(34)\quad \begin{cases} l_i^{-n} = \tfrac{1}{7} S l_i^{-n} + \Delta l_i^{-n}, \quad \Delta l_i^{-n} = \beta_i S'\Delta l_i^{-n} + \Delta^2 l_i^{-n}, \quad \Delta^2 l_i^{-n} = S''\Delta^2 l_i^{-n} + \Delta^3 l_i^{-n}, \\ \Delta^3 l_i^{-n} = S''\Delta^3 l_i^{-n} + \Delta^4 l_i^{-n}; \end{cases}$$

puis on tirera des formules (33), (34) combinées avec les équations (27) et (32)

$$(35)\quad \begin{cases} \Delta k_i^n = \left(\frac{1}{\Omega}\right)^n \Delta s_i^n, \qquad \Delta^2 k_i^n = \left(\frac{1}{\Omega}\right)^n \Delta^2 s_i^n, \qquad \Delta^3 k_i^n = \left(\frac{1}{\Omega}\right)^n \Delta^3 s_i^n, \\ \Delta^4 k_i^n = \left(\frac{1}{\Omega}\right)^n \Delta^4 s_i^n, \end{cases}$$

$$(36)\quad \begin{cases} \Delta l_i^{-n} = \left(\frac{1}{2\pi\Omega}\right)^n \Delta s_i^n, \quad \Delta^2 l_i^{-n} = \left(\frac{1}{2\pi\Omega}\right)^n \Delta^2 s_i^n, \quad \Delta^3 l_i^{-n} = \left(\frac{1}{2\pi\Omega}\right)^n \Delta^3 s_i^n, \\ \Delta^4 l_i^{-n} = \left(\frac{1}{2\pi\Omega}\right)^n \Delta^4 s_i^n. \end{cases}$$

Cela posé, en multipliant les deux membres de l'équation (28) par $\left(\frac{1}{\Omega}\right)^n$ ou par $\left(\frac{1}{2\pi\Omega}\right)^n$, on en conclura

$$(37)\qquad k_i^n = \tfrac{1}{7}\,\mathrm{S}\,k_i^n + \beta_i \mathrm{S}' \Delta k_i^n + \gamma_i \mathrm{S}'' \Delta^2 k_i^n + \delta_i \mathrm{S}''' \Delta^3 k_i^n,$$

$$(38)\qquad l_i^{-n} = \tfrac{1}{7}\,\mathrm{S}\,l_i^{-n} + \beta_i \mathrm{S}' \Delta l_i^{-n} + \gamma_i \mathrm{S}'' \Delta^2 l_i^{-n} + \delta_i \mathrm{S}''' \Delta^3 l_i^{-n}.$$

Les formules (37) et (38), entièrement semblables à l'équation (28), fournissent précisément les valeurs de k_i^n et de l_i^{-n} que l'on tirerait des équations (33) et (34) en y posant

$$(39)\qquad \Delta^4 k_i^n = 0, \qquad \Delta^4 l_i^{-n} = 0.$$

Les valeurs de θ_i ou des indices de réfraction, déterminées par les expériences de *Frauenhofer*, sont composées chacune de sept chiffres, et le 23e tableau du § 6 montre que l'on peut compter sur l'exactitude des cinq ou six premiers chiffres. Les valeurs de l_i n'ont pu être déterminées avec la même précision, et, pour chacune d'elles on ne peut regarder comme exacts que les trois ou quatre premiers chiffres. Il en résulte que, dans les valeurs de k_i, s_i, et par suite dans les valeurs de l_i^{-n}, k_i^n, s_i^n on ne saurait compter sur l'exactitude du cinquième chiffre et des suivants. On ne doit donc pas être surpris, lorsqu'on veut appliquer au calcul des différences finies des divers ordres de s_i^n, k_i^n, l_i^{-n} les formules (27), (33) ou (34), de trouver les différences finies du troisième ordre, sensiblement nulles, aussi bien que les différences finies du 4e ordre, c'est à dire comparables aux variations que produisent les erreurs d'observation. Or c'est précisément ce qui arrive. Si, pour fixer les idées, on applique les formules (27) à la détermination des différences finies

$$\Delta s_i^n, \quad \Delta^2 s_i^n, \quad \Delta^3 s_i^n,$$

et, si l'on prend pour unité de temps, non plus la seconde sexagésimale, mais le quotient que fournirait la division de cette seconde en mille millions de millions de parties égales, alors, en faisant usage des logarithmes de $\pm\beta_i$ et de $\mp\gamma_i$ renfermés

dans les deux premiers tableaux du § 6, et posant successivement $n = 2$, puis $n = 4$, on obtiendra les valeurs de s_i^n, Δs_i^n, $\Delta^2 s_i^n$, $\Delta^3 s_i^n$ comprises dans les tableaux suivants.

I. TABLEAU.

Valeurs de s_i^2, Δs_i^2, $\Delta^2 s_i^2$, $\Delta^3 s_i^2$.

i	1	2	3	4	5	6	7	Sommes	
s_i	2,833	2,968	3,309	3,704	4,023	4,541	4,960		
$L(s_i)$	4521774	4724701	5197228	5687093	6015718	6571528	6955147		
$L(s_i^2)$	9043518	9419408	0391156	1874186	2091136	3143056	3910294		$S s_i^2$
s_i^2	8,0253	8,8093	10,9508	13,7220	16,1862	20,6208	24,6053	102,9177	102,9177
$\frac{1}{7} S s_i^2$	14,7025	14,7025	14,7025	14,7025	14,7025	14,7025	14,7025	102,9175	$S' \Delta s_i^2$
Δs_i^2	-6,6792	-5,8932	-3,7517	-0,9805	1,4837	5,9183	9,9028	0,0002	-31,6031
$L(\pm \beta_i)$	2807310	2272021	0371132	4979974	5312101	2315123	4627934		
$L(-S' \Delta s_i^2)$	5391941	5391911	5391911	5391941	5391941	5391941	5391941		
Somme	8199251	7663962	5763073	0371915	1204012	7737361	0019875		
$\beta_i S' \Delta s_i^2$	-6,6058	-5,8398	-3,7697	-1,0891	1,3193	5,9393	10,0459	0	$S'' \Delta^2 s_i^2$
$\Delta^2 s_i^2$	-0,0734	-0,0534	0,0180	0,1089	0,1642	-0,0210	-0,1431	0,0002	0,540
$L(\mp \gamma_i)$	2296904	9299187	8770350	2534450	3010033	6552154	3898998		
$L(S'' \Delta^2 s_i^2)$	7323938	7323938	7323938	7323938	7323938	7323938	7323938		
Somme	9620842	5623125	6091228	9858388	0333971	8876392	1222936		
$\gamma_i S'' \Delta^2 s_i^2$	-0,0916	-0,0460	0,0107	0,0968	0,1080	0,0241	-0,1325	-0,0003	$S''' \Delta^2 s_i^2$
$\Delta^3 s_i^2$	0,0182	-0,0074	-0,0227	0,0121	0,0562	-0,0451	-0,0106	0,0001	-0,1786

II. TABLEAU.

Valeurs de s_i^4, Δs_i^4, $\Delta^2 s_i^4$, $\Delta^3 s_i^4$.

i	1	2	3	4	5	6	7	Sommes	
$L(s_i^4)$	8087096	8898816	0788912	2748872	4182872	6286112	7820588		$S s_i^4$
s_i^4	64,374	77,604	119,920	188,294	261,992	425,218	605,423	1742,825	1742,825
$\frac{1}{7} S s_i^4$	248,975	248,975	248,975	248,975	218,975	248,975	218,975	1742,825	$S' \Delta s_i^4$
Δs_i^4	-184,601	-171,871	-129,055	-60,681	-13,017	176,243	356,418	0	-1091,416
$L(\pm \beta_i)$	2807310	2272021	0371132	4979974	5812101	2345123	4627934		
$L(-S' \Delta s_i^4)$	0379903	0379903	0379903	0379903	0379903	0379903	0379903		
Somme	3187243	2651921	0751035	5359877	6192001	2725326	5007837		
$\beta_i S' \Delta s_i^4$	-208,317	-181,139	-118,879	-34,355	41,610	187,298	316,799	-0,003	$S'' \Delta^2 s_i^4$
$\Delta^2 s_i^4$	23,716	12,788	-10,176	-26,326	-28,593	-11,055	39,619	0,003	-132,308
$L(\mp \gamma_i)$	2296904	9299187	8770350	2584150	3010033	6552454	3898998		
$L(-S'' \Delta^2 s_i^4)$	1827085	1827085	1827085	1827085	1827085	1827085	1827085		
Somme	4123989	1126272	0597435	4361335	4837118	8379539	5726083		
$\gamma_i S'' \Delta^2 s_i^4$	25,846	12,961	-11,475	-27,299	-30,459	-6,866	37,377	0,063	
$\Delta^3 s_i^4$	-2,130	-0,173	1,299	0,973	1,866	-4,169	2,272	-0,062	

Pour s'assurer que les valeurs de $\Delta^2 s_i^n$, renfermées dans les dernières lignes horizontales de ces deux tableaux, sont en effet comparables aux variations que produisent dans les valeurs de s_i^n les erreurs d'observation, il suffit de calculer les diverses valeurs de $\Delta^2 l_i$ ou de $\frac{\Delta^2 l_i}{l_i}$, en supposant que l'on désigne par

$$l_i - \Delta^2 l_i$$

ce que devient l_i en vertu de la formule (32), quand on remplace dans cette formule s_i^n par

$$s_i^n - \Delta^2 s_i^n.$$

Or, dans cette supposition, l'on tire de la formule (32)

$$s_i^n - \Delta^2 s_i^n = (2\pi\Omega)^n (l_i - \Delta^2 l_i)^{-n}, \tag{40}$$

et par suite

$$1 - \frac{\Delta^2 s_i^n}{s_i^n} = \left(1 - \frac{\Delta^2 l_i}{l_i}\right)^{-n}$$

ou

$$1 - \frac{\Delta^2 l_i}{l_i} = \left(1 - \frac{\Delta^2 s_i^n}{s_i^n}\right)^{-\frac{1}{n}}. \tag{41}$$

D'ailleurs, $\Delta^2 s_i^n$ étant très petit par rapport s_i^n, le second membre de l'équation (41) se réduira sensiblement à

$$1 + \frac{1}{n} \frac{\Delta^2 s_i^n}{s_i^n},$$

et cette équation elle même à

$$\frac{\Delta^2 l_i}{l_i} = -\frac{1}{n} \frac{\Delta^2 s_i^n}{s_i^n}. \tag{42}$$

Enfin les valeurs de

$$-\frac{1}{n} \frac{\Delta^2 s_i^n}{s_i^n},$$

tirées des tableaux (1) ou (2), et par suite les valeurs correspondantes de $\frac{\Delta^2 l_i}{l_i}$ seront, en vertu de la formule (42), celles que présente le tableau suivant.

III. TABLEAU.

Valeurs de $\frac{\Delta^3 l_i}{l_i}$ *déduites de la formule* (42).

i	1	2	3	4	5	6	7
pour $n = 2$ $\Delta^3 s_i^2$	0,0182	-0,0074	-0,0227	0 0121	0,0362	-0,0154	-0,0106
s_i^2	8,0233	8,8093	10,9508	13,7220	16,1862	20,6208	21,6053
$\frac{\Delta^3 l_i}{l_i} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta^3 s_i^2}{s_i^2}$	-0,0011	0,0001	0,0010	-0,0004	-0,0017	0,0011	0,0002
pour $n = 4$ $\Delta^3 s_i^4$	-2,130	-0,173	1,299	0,973	1,866	-4,169	2,272
s_i^4	64,374	77,601	119,920	188,294	261,992	425,218	605,123
$\frac{\Delta^3 l_i}{l_i} = -\frac{1}{4} \frac{\Delta^3 s_i^4}{s_i^4}$	0,0083	0,0006	-0,0027	-0,0013	-0,0018	-0,0025	-0,0009

D'autre part, en ayant recours à diverses expériences successives, dans son mémoire sur la diffraction, pour déterminer l'épaisseur des ondes lumineuses qui donnent naissance à un certain rayon, et supposant cette épaisseur exprimée en millimètres, *Fresnel* a obtenu des nombres qui varient entre les limites

$$0{,}000635 \quad \text{et} \quad 0{,}000640$$

dont la différence, divisée par le plus petit, donne pour quotient environ

$$0{,}0079.$$

Donc, puisque ce quotient surpasse et même assez notablement tous les nombres renfermés dans la 4e et la dernière ligne horizontale du troisième tableau, si l'on en excepte le seul nombre 0,0083 qui diffère peu du quotient dont il s'agit, nous devons conclurre que les valeurs de $\Delta^3 s_i^2$ et $\Delta^3 s_i^4$ renfermées dans les 1er et 2e tableaux sont comparables aux variations que produisent dans les valeurs de s_i^n les erreurs d'observation. La même conclusion se déduirait aussi des expériences de *Fraunhofer* qui fournissent pour les épaisseurs des ondes lumineuses des variations du même ordre que les expériences de *Fresnel*.

On peut donc négliger

$$\Delta^3 s_i^n, \quad \Delta^3 k_i^n, \quad \Delta^3 l_i^{-n},$$

dans les formules (27), (33), (34), et par suite

$$S''' \Delta^3 s_i^n, \quad S''' \Delta^3 k_i^n, \quad S''' \Delta^3 l_i^{-n},$$

dans les formules (28), (37), (38); ce qui permet de réduire les trois dernières formules à

(43) $$s_i^n = \tfrac{1}{7}\,\mathrm{S}\,s_i^n + \beta_i\,\mathrm{S}'\Delta s_i^n + \gamma_i\,\mathrm{S}''\Delta^2 s_i^n,$$

(44) $$k_i^n = \tfrac{1}{7}\,\mathrm{S}\,k_i^n + \beta_i\,\mathrm{S}'\Delta k_i^n + \gamma_i\,\mathrm{S}''\Delta^2 k_i^n,$$

(45) $$l_i^{-n} = \tfrac{1}{7}\,\mathrm{S}\,l_i^{-n} + \beta_i\,\mathrm{S}'\Delta l_i^{-n} + \gamma_i\,\mathrm{S}''\Delta^2 l_i^{-n}.$$

Si, dans la formule (43), on pose successivement $n=2$ et $n=4$, on en tirera, eu égard aux tableaux 1 et 2,

(46) $$\begin{cases} s_i^2 = 14{,}7025 - 34{,}6094\,\beta_i + 0{,}540\,\gamma_i, \\ s_i^4 = 248{,}975 - 1091{,}416\,\beta_i - 152{,}303\,\gamma_i; \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

(47) $$\begin{cases} \beta_i - 0{,}01560\,\gamma_i = 0{,}42481 - 0{,}028894\,s_i^2, \\ \beta_i + 0{,}13955\,\gamma_i = 0{,}22812 - 0{,}00091624\,s_i^4, \end{cases}$$

puis on conclurra de ces dernières équations

$$\gamma_i = -\frac{0{,}19669}{0{,}15515} + \frac{0{,}028894}{0{,}15515}\,s_i^2 - \frac{0{,}00091624}{0{,}15515}\,s_i^4$$
$$\beta_i = 0{,}01560\,\gamma_i + 0{,}42481 - 0{,}028894\,s_i^2,$$

ou plus simplement

(48) $$\begin{cases} \beta_i = 0{,}40503 - 0{,}025988\,s_i^2 - 0{,}0000921\,s_i^4, \\ \gamma_i = -1{,}2677 + 0{,}18623\,s_i^2 - 0{,}0059055\,s_i^4. \end{cases}$$

Si d'ailleurs on pose, comme à la page 160,

(49) $$\begin{cases} \mathfrak{U} = U' - \Theta = \mathrm{S}'\Delta\Theta_i, \\ \mathfrak{V} = U'' - \Theta - (U' - \Theta)\,\mathrm{S}''\beta_i = \mathrm{S}'\Delta^2\Theta_i, \\ \mathfrak{W} = U''' - \Theta - (U' - \Theta)\,\mathrm{S}'''\beta_i - [U'' - \Theta - (U' - \Theta)\mathrm{S}''\beta_i]\,\mathrm{S}''\gamma_i = \mathrm{S}''\Delta^3\Theta_i, \end{cases}$$

c'est à dire, si l'on prend pour

$$\Theta,\ \mathfrak{U},\ \mathfrak{V},\ \mathfrak{W}$$

les nombres renfermés dans le 5e tableau du § 8, on réduira la formule (16) à

(50) $$\Theta_i = \Theta + \mathfrak{U}\beta_i + \mathfrak{V}\gamma_i + \mathfrak{W}\delta_i;$$

puis, en négligeant dans le second membre le terme $\mathfrak{W}\delta_i$, qui est du même ordre que $\Delta^3 s_i$ ou $\Delta^3\Theta_i$, on trouvera

(51) $$\Theta_i = \Theta + \mathfrak{U}\beta_i + \mathfrak{V}\gamma_i.$$

Cela posé, on tirera de la formule (51) jointe aux équations (48)

(52) $$\Theta_i = \Theta + 0{,}40503\,\mathfrak{U} - 1{,}2677\,\mathfrak{B} - \{0{,}025988\,\mathfrak{U} - 0{,}18623\,\mathfrak{B}\}\, s_i^2 - \{0{,}0000921\,\mathfrak{U} + 0{,}0059055\,\mathfrak{B}\}\, s_i^4,$$

et par suite

(53) $$\Theta_i = a + b\,s_i^2 + c\,s_i^4,$$

les valeurs de a, b, c étant

(54) $$\begin{cases} a = \Theta + 0{,}40503\,\mathfrak{U} - 1{,}2677\,\mathfrak{B}, \\ b = -\,0{,}025988\,\mathfrak{U} + 0{,}18623\,\mathfrak{B}, \\ c = -\,0{,}0000921\,\mathfrak{U} - 0{,}0059055\,\mathfrak{B}; \end{cases}$$

puis en écrivant simplement

θ^2 au lieu de $\Theta_i = \theta_i^2$, et s^2 au lieu de s_i^2

on aura définitivement

(55) $$\theta^2 = a + b\,s^2 + c\,s^4.$$

En substituant dans les formules (54) à la place de

Θ, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$

les nombres que renferme le 5e tableau du § 8, on obtiendra les valeurs de a, b, c comprises dans celui que nous allons tracer.

IV. TABLEAU.

Valeurs de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$.

	Eau		Solution de	Crownglass			Flintglass				
	1. série.	2. série.	potasse.	1. espèce	2. espèce	3. espèce	1. espèce	2. espèce	3. espèce 1. série.	3. espèce 2. série.	4. espèce
$L(-\mathfrak{U})$	8696365	8677385	9931231	1154076	1230116	2075590	4106912	4623471	4698441	4697264	4721200
$L(40503)$	6074872	6074872	6074872	6074872	6074872	6074872	6074872	6074872	6074872	6074872	6074872
Somme	4771237	4752257	6006103	7228948	7304988	8150462	0181784	0698343	0773313	0772136	0796072
$L(+\mathfrak{B})$	5589484	5371892	5441491	3723596	3639878	0944711	4265113	5786392	5710097	6156345	2866810
$L(12677)$	1030305	1030305	1030305	1030305	1030305	1030305	1030305	1030305	1030305	1030305	1030305
Somme	6619789	6402197	6471796	4753901	4670183	1975016	5295418	6816697	6740402	7186650	3897115
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,348779	2,353887	2,446260	2,615351	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825
$0,40503\,\mathfrak{U}$	-30000	-29869	-39867	-52832	-53765	-63320	-104275	-117445	-119490	-119458	-120118
$-1,2677\,\mathfrak{B}$	-4592	-4367	-4142	-2988	-2931	-1576	3385	4805	4721	5232	2453
$\mathfrak{a}$	1,751609	1,751950	1,934311	2,292959	2,297191	2,381364	2,514461	2,578081	2,586562	2,587096	2,588160
$L(-\mathfrak{U})$	8696365	8677385	9931231	1154076	1230116	2075590	4106912	4623471	4698441	4697264	4721200
$L(25988)$	4147729	4147729	4147729	4147729	4147729	4147729	4147729	4147729	4147729	4147729	4147729
Somme	2844094	2825114	4078960	5301805	5377845	6223319	8254641	8771200	8846170	8844993	8868929
$L(+\mathfrak{B})$	5589484	5371892	5441491	3723596	3639878	0944711	4265113	5786392	5710097	6156345	2866810
$L(18623)$	2700541	2700541	2700541	2700541	2700541	2700541	2700541	2700541	2700541	2700541	2700541
Somme	8290025	8072433	8142032	6424137	6340419	3645252	6965654	8486933	8410638	8856886	5567351
$-0,025988\,\mathfrak{U}$	0,19249	0,19165	0,25580	0,33899	0,34497	0,41911	0,66906	0,75357	0,76669	0,76648	0,77071
$0,18623\,\mathfrak{B}$	6745	6416	6084	4389	4306	2315	-4972	-7058	-6935	-7686	-3604
$\mathfrak{b}$	0,25994	0,25581	0,31664	0,38288	0,38803	0,44226	0,61934	0,68299	0,69734	0,68962	0,73467
$L(-\mathfrak{U})$	8696365	8677385	9931231	1154076	1230116	2075590	4106912	4623471	4698441	4697264	4721200
$L(921)$	9644576	9644576	9644576	9644576	9644576	9644576	9644576	9644576	9644576	9644576	9644576
Somme	8340941	8321961	9575807	0798652	0874692	1720166	3751488	4268047	4343017	4341840	4365776
$L(+\mathfrak{B})$	5589484	5371892	5441491	3723596	3639878	0944711	4265113	5786392	5710097	6156345	2866810
$L(59055)$	7712579	7712579	7712579	7712579	7712579	7712579	7712579	7712579	7712579	7712579	7712579
Somme	3302063	3084471	3154070	1436175	1352457	8657290	1977692	3498971	3422676	3868924	0579389
$-0,0000921\,\mathfrak{U}$	0,06825	0,06795	0,09069	0,12019	0,12231	0,14860	0,23722	0,26718	0,27183	0,27176	0,27326
$-0,0059055\,\mathfrak{B}$	-0,21390	-0,20345	-0,19293	-0,13919	-0,13654	-0,07341	15768	22382	21992	24372	11427
$\mathfrak{c}$	-0,14565	-0,13550	-0,10224	-0,01900	-0,01423	0,07519	0,39490	0,49100	0,49175	0,51548	0,38753

Parmi les logarithmes que renferme le 4e tableau, les uns, savoir ceux des valeurs numeriques des quantités

$$\mathfrak{U} = S'\Delta\Theta_i \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} = S''\Delta^2\Theta_i$$

ont été extraits de la dernière colonne verticale des tableaux nº 2 des paragraphes 7 et 8. D'autres logarithmes, savoir ceux des nombres

$$1,2677 = \frac{0,19969}{0,15515}, \quad 0,18623 = \frac{0,028894}{0,15515}, \quad 0,00059055 = \frac{0,00091624}{0,15515}$$

et

$$0,0000921 = 0,01560 \times 0,0059055 = \frac{0,540}{34,6094}(0,0059055),$$

ont été, pour plus de précision, déduits des logarithmes des nombres dont ces coefficients représentent les produits ou les rapports. C'est ainsi qu'on trouve par exemple

$$L(1,2677) = L(19669) - L(15515) = 2937823 - 1907518 = 1030305.$$

On peut d'ailleurs confirmer l'exactitude des valeurs de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ fournies par le 4[e] tableau, de la manière suivante.

On tire de la formule (53)

$$(56) \qquad \Theta = \tfrac{1}{7} \mathrm{S} \Theta_i = \mathfrak{a} + \tfrac{1}{7} \mathfrak{b} \mathrm{S} s_i^2 + \tfrac{1}{7} \mathfrak{c} \mathrm{S} s_i^4.$$

Or, si l'on substitue dans le second membre de l'équation (56) les valeurs de

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathrm{S} s_i^2$, $\mathrm{S} s_i^4$

fournies par les tableaux 1, 2 et 4, on retrouvera les valeurs de Θ fournies par l'expérience, comme le montre le tableau suivant.

V. TABLEAU.

Valeurs de Θ tirées de la formule (56).

	Eau		Solution de	Crownglass			Flintglass				
	1. série.	2. série.	potasse.	1. espèce	2. espèce	3. espèce	1. espèce	2. espèce	3. espèce 1. série.	3. espèce 2. série.	1. espèce
$L(\mathfrak{b})$	4148731	4079175	5005658	5830627	5888653	6156777	7919291	8344143	8131116	8386098	8660923
$L(\frac{1}{7}\mathrm{S}s_i^2)$	1673921	1673921	1673921	1673921	1673921	1673921	1673921	1673921	1673921	1673921	1673921
Somme	5822652	5753096	6679579	7504548	7562574	8130698	9593212	0018064	0108367	0060019	0334844
$L(\mathfrak{c})$	1633105	1319393	0096208	2787586	1532049	8761601	5964871	6910815	6917141	7122118	5883053
$L(\frac{1}{7}\mathrm{S}s_i^4)$	3961558	3961558	39[illegible]1558	3961558	3961558	3961558	3961558	3961558	3961558	3961558	3961558
Somme	5591663	5280951	4057766	6749094	5493607	2723159	9926129	0872373	0879002	1083676	9844611
$\mathfrak{a}$	1,751609	1,751950	1,934311	2,292959	2,297191	2,381364	2,514461	2,578081	2,586562	2,587096	2,588160
$\frac{1}{7}\mathfrak{b}\mathrm{S}s_i^2$	38218	37611	46554	56293	57050	65023	91059	100417	102527	101391	108015
$\frac{1}{7}\mathfrak{c}\mathrm{S}s_i^4$	-3626	-3374	-2546	-473	-354	1872	9832	12225	12213	12834	9619
	1,786201	1,786187	1,978319	2,348779	2,353887	2,418259	2,615352	2,690723	2,701332	2,701321	2,705821

En adoptant les valeurs de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ fournies par le 4[e] tableau, on aura

(57)

pour l'eau 1[re] série . . . . $\theta^2 = 1,751609 + 0,0025994\, s^2 - 0,000014565\, s^4$,

2[e] série . . . . $\theta^2 = 1,751950 + 0,0025581\, s^2 - 0,000013550\, s^4$,

pour la solution de potasse . . $\theta^2 = 1,934311 + 0,0031664\, s^2 - 0,000010224\, s^4$,

pour le crownglass 1. espèce . $\theta^2 = 2,292959 + 0,0038288\, s^2 - 0,000001900\, s^4$,

2. espèce . $\theta^2 = 2,297191 + 0,0038803\, s^2 - 0,000001423\, s^4$,

3. espèce . $\theta^2 = 2,381364 + 0,0044226\, s^2 + 0,000007519\, s^4$,

pour le flintglass 1. espèce . $\theta^2 = 2,514461 + 0,0061934\, s^2 + 0,000039490\, s^4$,

2. espèce . $\theta^2 = 2,578081 + 0,0068299\, s^2 + 0,000049100\, s^4$,

3. esp. 1. série $\theta^2 = 2,586562 + 0,0069734\, s^2 + 0,000049175\, s^4$,

2. série $\theta^2 = 2,587096 + 0,0068962\, s^2 + 0,000051548\, s^4$,

4. espèce . $\theta^2 = 2,588160 + 0,0073467\, s^2 + 0,000038753\, s^4$,

En substituant successivement dans chacune des formules (57) les valeurs de s correspondantes aux rayons

$$B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H$$

de *Frauenhofer*, c'est à dire, les valeurs de s_i comprises dans le premier tableau, on obtiendrait des valeurs de θ^2 et par suite des valeurs de θ très peu différentes de celles que l'expérience a données. Au reste, pour trouver les différences des unes aux autres, et constater l'accord des formules (57) avec les observations, il n'est pas même nécessaire d'effectuer la substitution dont il s'agit. On arrive plus facilement au même but, à l'aide des considerations suivantes.

La formule (50), c'est à dire, en d'autres termes, la formule (16) de la page 160 ne subsiste qu' approximativement. Mais, comme nous l'avons déjà remarqué [page 170], cette formule deviendra rigoureuse, si l'on y remplace Θ_i par $\Theta_i - \Delta^4 \Theta_i$, en attribuant à Θ_i la valeur fournie par les observations. Pareillement les formules (43) et (51) deviendront exactes, si l'on y remplace

$$s_i^n \quad \text{et} \quad \Theta_i$$

par

$$s_i^n - \Delta^3 s_i^n \quad \text{et} \quad \Theta_i - \Delta^3 \Theta_i,$$

en attribuant à s_i^n, Θ_i les valeurs fournies par les observations, c'est à dire qu' alors on aura rigoureusement

(58) $$s_i^n - \Delta^3 s_i^n = \tfrac{1}{7} \mathrm{S}\, s_i^n + \beta_i \mathrm{S}' \Delta s_i^n + \gamma_i \mathrm{S}'' \Delta^2 s_i^n,$$

et

(59) $$\Theta_i - \Delta^3 \Theta_i = \Theta + \mathfrak{U} \beta_i + \mathfrak{V} \gamma_i.$$

Effectivement l'équation (58) se déduit immédiatement des trois premières des formules (27), et l'équation (59), que l'on peut encore écrire comme il suit

(60) $$\Theta_i - \Delta^3 \Theta_i = \tfrac{1}{7} \mathrm{S}\, \Theta_i + \beta_i \mathrm{S}' \Delta \Theta_i + \gamma_i \mathrm{S}'' \Delta^2 \Theta_i,$$

est, aussi bien que l'équation (133) de la page 116, une conséquence nécessaire des formules (113) du § 6. D'ailleurs, pour obtenir l'équation (53), il a suffi d'éliminer de la formule (51) les valeurs de

$$\beta_i,\ \gamma_i$$

tirées des équations (46) auxquelles se réduit la formule (43) quand on y pose successivement $n = 2$, $n = 4$; et, si au lieu des formules (43), (51) on employe dans l'élimination dont il s'agit les formules (58), (59) on trouvera de la même manière

(61) $$\Theta_i - \Delta^3 \Theta_i = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\,(s_i^2 - \Delta^3 s_i^2) + \mathfrak{c}\,(s_i^4 - \Delta^3 s_i^4).$$

Donc, en vertu de ce qui a été dit cidessus, la formule (61) sera exacte, si l'on y substitue les valeurs de s_i et Θ_i fournies par l'expérience, en attribuant à

$$\Delta^3 s_i^2,\quad \Delta^3 s_i^4,\quad \Delta^3 \Theta_i$$

les valeurs précedemment calculées et comprises dans les tableaux 1, 2 ainsi que dans le 3e tableau du § 8. Or on tire de la formule (61)

$$(62) \qquad \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\, s_i^2 + \mathfrak{c}\, s_i^4 = \Theta_i + \mathfrak{b}\, \Delta^3 s_i^2 + \mathfrak{c}\, \Delta^3 s_i^4 - \Delta^3 \Theta_i,$$

et le premier membre de la formule (62) est précisement la valeur de $\Theta_i = \theta_i^2$ ou de θ^2 que fournit chacune des équations (53), (55), (57). Donc, pour obtenir les valeurs de θ_i^2 que déterminent les formules (57), il suffira d'ajouter aux diverses valeurs de $\Theta_i = \theta_i^2$ fournies par l'expérience les valeurs correspondantes du trinome

$$(63) \qquad \lambda_i = \mathfrak{b}\, \Delta^3 s_i^2 + \mathfrak{c}\, \Delta^3 s_i^4 - \Delta^3 \Theta_i,$$

qui se trouvent comprises dans le tableau suivant.

VI. TABLEAU.

Valeurs de $\lambda_i = \mathfrak{b}\, \Delta^3 s_i^2 + \mathfrak{c}\, \Delta^3 s_i^4 - \Delta^3 \Theta_i$ exprimées en millionièmes.

	Eau		Solution de potasse.	Crownglass			Flintglass				
	1. série.	2. série.		1. espèce	2. espèce	3. espèce	1. espèce	2. espèce	3. espèce 1. série	3. espèce 2. série	4. espèce
$\mathfrak{b}\Delta^3 s_1^2$	47	47	58	70	71	81	113	121	127	126	134
$\mathfrak{c}\Delta^3 s_1^4$	31	29	22	4	3	-16	-81	-105	-105	-110	-83
$-\Delta^3\Theta_1$	62	25	17	-45	-5	-55	127	38	-58	-88	-20
λ_1	140	101	97	29	69	10	156	57	-36	-72	31
$\mathfrak{b}\Delta^3 s_2^2$	-19	-19	-23	-28	-29	-33	-46	-51	-52	-51	-31
$\mathfrak{c}\Delta^3 s_2^4$	2	2	2	0	0	-1	-7	-8	-9	-9	-7
$-\Delta^3\Theta_2$	-62	1	-8	31	23	15	-37	-60	15	-5	88
λ_2	-79	-16	-29	3	-6	-19	-90	-119	-46	-65	27
$\mathfrak{b}\Delta^3 s_3^2$	-59	-58	-72	-87	-88	-100	-111	-155	-158	-157	-167
$\mathfrak{c}\Delta^3 s_3^4$	-19	-18	-13	-2	-2	10	51	64	61	67	50
$-\Delta^3\Theta_3$	-23	-16	-17	19	-35	72	-147	43	52	17	33
λ_3	-101	-92	-102	-70	-125	-18	237	-18	-42	-73	-81
$\mathfrak{b}\Delta^3 s_4^2$	31	31	38	46	47	54	75	83	81	83	89
$\mathfrak{c}\Delta^3 s_4^4$	-14	-13	-10	-2	-1	7	38	48	48	50	38
$-\Delta^3\Theta_4$	22	-10	7	-6	18	-31	56	-21	-7	73	-101
λ_4	39	8	35	38	64	30	169	110	125	206	26
$\mathfrak{b}\Delta^3 s_5^2$	146	144	178	215	218	249	348	351	392	388	413
$\mathfrak{c}\Delta^3 s_5^4$	-27	-25	-19	-3	-3	14	74	92	92	96	72
$-\Delta^3\Theta_5$	-8	10	31	33	-47	-20	97	37	-53	-65	-16
λ_5	111	129	190	245	168	243	518	513	431	419	469
$\mathfrak{b}\Delta^3 s_6^2$	-118	-116	-111	-171	-176	-201	-281	-310	-317	-313	-334
$\mathfrak{c}\Delta^3 s_6^4$	61	56	43	8	6	-31	-165	-205	-205	-215	-162
$-\Delta^3\Theta_6$	8	17	-22	-49	65	-20	-7	-59	9	-27	85
λ_6	-49	-43	-123	-212	-105	-252	-453	-574	-513	-555	411
$\mathfrak{b}\Delta^3 s_7^2$	-28	-27	-34	-41	-41	-47	-66	-72	-71	-73	-78
$\mathfrak{c}\Delta^3 s_7^4$	-33	-31	-23	-4	-3	17	90	112	112	117	88
$-\Delta^3\Theta_7$	1	-25	-11	13	-16	40	-91	22	45	91	-67
λ_7	-60	-83	-68	-32	-60	10	-67	63	83	135	-57

Ainsi, par exemple, si l'on ajoute à la valeur de Θ_1 trouvée pour l'eau [1re série], c'est à dire, à

$$\Theta_1 = 1{,}771387$$

la première des valeurs de λ fournies par le 6e tableau, ou le nombre

$$0{,}000140\,,$$

on obtiendra pour somme le nombre

$$1{,}771527$$

qui représente précisément la valeur de θ^2 à laquelle on parvient en posant dans la première des formules (57)

$$s = s_1 = 2{,}833\,, \quad L(s) = 4521774.$$

Pareillement si de la valeur de Θ_8 relative au flintglass [2e espèce], c'est à dire de

$$\Theta_8 = 2{,}740370$$

on retranche le nombre 574, qui, pris avec le signe —, représente la valeur de λ_8 correspondante à la même substance, on aura pour reste le nombre

$$2{,}739796$$

qui est précisement la valeur de θ^2 à laquelle on parvient en posant dans la huitième des formules (57)

$$s = s_8 = 4{,}541\,, \quad L(s) = 6571528.$$

Au reste l'exactitude des valeurs de λ_i comprises dans le 6e tableau peut être confirmée comme il suit.

Les formules (117) du § 6 donnent

$$\mathrm{S}\,\Delta^3\Theta_i = 0\,, \quad \mathrm{S}'\Delta^3\Theta_i = 0\,, \quad \mathrm{S}''\Delta^3\Theta_i = 0.$$

On aura de même, en désignant par n l'un des nombres entiers 2 et 4,

$$(64) \qquad \mathrm{S}\,\Delta^3 s_i^n = 0\,, \quad \mathrm{S}'\Delta^3 s_i^n = 0\,, \quad \mathrm{S}''\Delta^3 s_i^n = 0\,,$$

et par suite on tirera de l'équation (63)

$$(65) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{S}\,\lambda_i = \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 = 0\,, \\ \mathrm{S}'\lambda_i = \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_5 - \lambda_6 - \lambda_7 = 0\,, \\ \mathrm{S}''\lambda_i = - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 - \lambda_7 = 0. \end{array} \right.$$

Enfin de ces dernières équations combinées entre elles on conclurra

$$(66) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = -(\lambda_3 + \lambda_4) = \lambda_5 + \lambda_6 = -\lambda_7.$$

Donc les quatre quantités

$$(67) \qquad \lambda_1 + \lambda_2\,, \quad \lambda_3 + \lambda_4\,, \quad \lambda_5 + \lambda_6\,, \quad \lambda_7$$

devront être égales au signe prés et alternativement affectées de signes contraires. Or cette condition se trouve effectivement remplie avec une exactitude suffisante par les valeurs de λ_i que fournit le 6e tableau, comme le prouve celui que nous allons tracer.

VII. TABLEAU.

Valeurs de $\lambda_1+\lambda_2$, $\lambda_3+\lambda_4$, etc. . . . exprimées en millionièmes.

	Eau		Solution de potasse.	Crowglass			Flintglass				
	1. série.	2. série.		1. espèce.	2. espèce.	3. espèce.	1. espèce.	2. espèce.	3. espèce. 1. série.	3. espèce. 2. série.	4. espèce.
$\lambda_1+\lambda_2$	61	85	68	32	63	-9	66	-62	-82	-137	58
$\lambda_3+\lambda_4$	-62	-81	-67	-32	-61	12	-68	62	83	133	-58
$\lambda_5+\lambda_6$	62	86	67	33	63	-9	66	-61	-82	-136	58
λ_7	-60	-83	-68	-32	-60	10	-67	62	83	135	-57

D'après ce qu'on vient de dire, les valeurs de θ^2 fournies par les équations (57) coïncident avec celles que l'on déduit de la formule

(68) $$\theta^2 = \Theta_i + \lambda_i$$

en attribuant à Θ_i les valeurs données par l'expérience et à λ_i les valeurs très petites que présente le 6e tableau. Or on tire de la formule (68)

(69) $$\theta = (\Theta_i+\lambda_i)^{\frac{1}{2}} = (\theta_i^2+\lambda_i)^{\frac{1}{2}} = \theta_i + \frac{1}{2}\frac{\lambda_i}{\theta_i} - \frac{1}{8}\frac{\lambda_i^2}{\theta_i^3} + \text{etc.}\ldots;$$

et comme, pour chacune des valeurs attribuées à λ_i et à θ_i, le troisième terme et les suivants, dans le dernier membre de l'équation (69), offriront une somme inférieure à un millionième, on pourra sans erreur sensible réduire cette équation à

(70) $$\theta = \theta_i + \frac{1}{2}\frac{\lambda_i}{\theta_i}.$$

Donc la différence entre la valeur de θ déterminée par l'une des formules (57) et la valeur de θ_i donnée par l'expérience se réduira simplement à la quantité

(71) $$\frac{\lambda_i}{2\theta_i} = \frac{1}{2}\theta_i^{-1}\lambda_i$$

dont les diverses valeurs se tirent aisément du 6e tableau, et se trouvent comprises dans celui que nous allons tracer.

VIII. TABLEAU.

Valeurs de $\frac{1}{2}\theta_i^{-1}\lambda_i$, exprimées en millionièmes.

	Eau		Solution de potasse.	Crownglass			Flintglass				
	1. série.	2. série.		1. espèce	2. espèce	3. espèce	1. espèce	2. espèce	3. espèce 1. série.	3. espèce 2. série.	4. espèce
pour $i=1$	53	38	35	10	23	4	49	18	-11	-22	10
2	-30	-6	-10	1	-2	-6	-28	-37	-14	-20	8
3	-38	-31	-36	-23	-41	-6	-74	-15	-13	-22	-26
4	15	3	12	12	20	10	52	31	38	63	8
5	41	48	67	80	55	78	160	156	131	127	112
6	-18	-16	-41	-69	-31	-80	-139	-173	-155	-167	-124
7	-22	-31	-24	-10	-19	3	-20	19	25	40	-17
Sommes $i=1$ et 2	23	32	25	11	21	-2	21	-19	-25	-12	18
3 et 4	-23	-31	-24	-11	-21	4	-22	17	25	41	-18
5 et 6	23	32	23	11	21	-2	21	-17	-21	-40	18
7	-22	-31	-24	-10	-19	3	-20	19	25	40	-17

Dans le 8e tableau nous avons joint pour chaque substance, aux diverses valeurs de

$$\tfrac{1}{2}\theta_i^{-1}\lambda_i,$$

les sommes de ces valeurs prises deux à deux à partir de celle qui correspond à $i=1$, c'est à dire, les valeurs des quatre quantités

$$(72)\qquad \frac{\lambda_1}{2\theta_1}+\frac{\lambda_2}{2\theta_2},\quad \frac{\lambda_3}{2\theta_3}+\frac{\lambda_4}{2\theta_4},\quad \frac{\lambda_5}{2\theta_5}+\frac{\lambda_6}{2\theta_6},\quad \frac{\lambda_7}{2\theta_7}.$$

En ayant égard aux formules (65) ou (66), et raisonnant comme dans le § 6 [page 128 et 129], on démontre sans peine que les quantités (72) doivent être, sensiblement égales au signe près, et alternativement affectées de signes contraires. Or cette condition se trouve en effet remplie avec une exactitude suffisante par les quantités comprises dans les quatre dernières lignes horizontales du 8e tableau ; ce qui prouve la justesse de nos calculs.

D'après le 8e tableau, la différence entre la valeur de θ déterminée par l'une des formules (57) et la valeur de θ_i fournie par l'expérience est généralement inférieure, abstraction faite du signe, à un dix millième. Il n'y a d'exception que pour le flintglass dans le cas où l'on pose $i=6$ ou $i=7$, et alors même la différence dont il s'agit, prise abstraction faite du signe, ne surpasse jamais 173 millionièmes, ou environ un dix-millième trois quarts. Les formules (57) reproduisent donc avec de légères variations les valeurs de θ_i fournies par l'expérience. Toutefois les variations dont il s'agit deviennent, pour certains rayons et certaines substances, supérieures aux variations observées dans le passage d'une série d'expériences à un autre ; puisque ces dernières variations, d'après le 23e tableau du § 6, n'ont jamais surpassé

la moitié d'un dix-millième. Ainsi les équations (57), appliquées à la détermination des valeurs de θ^2 et de θ, n'atteignent pas le même degré de précision que les formules établies dans les paragraphes 6, 7 et 8, par exemple, les formules (11), (27) et (39) [§ 7], desquelles on déduisait pour $\Theta_i = \theta_i^2$, et par suite, pour θ_i, des valeurs dont l'exactitude etant comparable ou même supérieure à celle des résultats directement fournis par l'expérience. Mais il est juste de remarquer que les coefficients, renfermés dans les équations (57), ou les valeurs de

$$\mathfrak{a}, \ \mathfrak{b}, \ \mathfrak{c}$$

relatives aux diverses substances dépendent à la fois des valeurs de θ et de l fournies par l'expérience, les unes avec sept chiffres, les autres avec quatrea chiffres seulement; tandisque les coefficients compris dans les formules du § 6, 7 et 8 dépendent uniquement des valeurs observées de θ. Pour cette raison, en etablissant les formules (57), on a du négliger les différences du troisième ordre, dont on avait tenu compte dans les paragraphes 6, 7 et 8. On ne doit donc pas s'étonner que pour certains rayons et certaines substances les nombres compris dans le 8e tableau surpassent un dix-millième et s'elevent jusqu'à un dix-millième trois quarts environ.

Les plus grands nombres que renferment les tableaux 6 et 8 etant 574 et 173 millionièmes, il en résulte que les formules (57) déterminent les valeurs de θ^2 à 5 ou 6 dix-millièmes près et les valeurs de θ à un ou deux dix-millièmes près. Comme d'ailleurs dans les tableaux 1 et 2, les valeurs de s^2 sont toutes inférieures à 25 et celles de s^4 à 606, il est clair qu'on pourra simplifier les formules (57), en supprimant les deux derniers chiffres décimaux dans les coefficients de s^2 et de s^4. Car cette suppression produira dans la valeur de θ^2 une variation inférieure à la somme des produits

$$25 \times 0{,}00001 = 0{,}00025 \quad \text{et} \quad 606 \times 0{,}0000001 = 0{,}0000606,$$

par conséquent inférieure au nombre

$$0{,}0003106$$

et à plus forte raison à

$$0{,}000574.$$

Après cette suppression, les deux valeurs de chaque coefficient $\mathfrak{b}$ ou $\mathfrak{c}$, correspondantes à deux séries d'expériences faites sur la même substance, seront, comme on devait s'y attendre, très peu différentes l'une de l'autre; et si l'on remplace ces mêmes valeurs par leur demi-somme, si de plus on supprime encore les deux dernières décimales dans les valeurs de $\mathfrak{a}$, on réduira les formules (57) aux suivantes.

$$(73)\quad \left\{ \begin{array}{lll} \text{Eau} \ldots\ldots & \theta^2 = 1{,}7518 + 0{,}00258\,s^2 - 0{,}0000141\,s^4, \\ \text{Solution de potasse} . & \theta^2 = 1{,}9343 + 0{,}00317\,s^2 - 0{,}0000102\,s^4, \\ \text{Crownglass 1. espèce} & \theta^2 = 2{,}2930 + 0{,}00383\,s^2 - 0{,}0000019\,s^4, \\ \qquad \text{2. espèce} & \theta^2 = 2{,}2972 + 0{,}00388\,s^2 - 0{,}0000014\,s^4, \\ \qquad \text{3. espèce} & \theta^2 = 2{,}3814 + 0{,}00442\,s^2 + 0{,}0000075\,s^4, \\ \text{Flintglass 1. espèce} . & \theta^2 = 2{,}5145 + 0{,}00619\,s^2 + 0{,}0000395\,s^4, \\ \qquad \text{2. espèce} . & \theta^2 = 2{,}5781 + 0{,}00683\,s^2 + 0{,}0000491\,s^4, \\ \qquad \text{3. espèce} . & \theta^2 = 2{,}5868 + 0{,}00693\,s^2 + 0{,}0000504\,s^4, \\ \qquad \text{4. espèce} . & \theta^2 = 2{,}5882 + 0{,}00735\,s^2 + 0{,}0000388\,s^4. \end{array} \right.$$

Si, en désignant par Ω la vitesse de propagation de la lumière dans l'air, on pose

$$(74)\qquad \frac{\Omega^2}{a^2} = \mathfrak{I},$$

on tirera des formules (5) et (11)

$$(75)\qquad a_1 = a\,\mathfrak{I}, \quad a_2 = -\,a\,b\,\mathfrak{I}^2, \quad a_3 = a\,(2\,b^2 - a\,c)\,\mathfrak{I}^3.$$

Par suite, si l'on réduit le dernier membre de la formule (4) à ses trois premiers termes, on tirera de cette formule, en supposant les valeurs de Ω et de k relatives non plus à l'air, mais à un milieu quelconque

$$(76)\qquad \frac{s^2}{k^2} = \Omega^2 = a\,\mathfrak{I}\,\{1 - b\,\mathfrak{I}\,k^2 + (2\,b^2 - a\,c)\,\mathfrak{I}^2\,k^4\};$$

puis on en conclurra

$$(77)\qquad s^2 = a\,\mathfrak{I}\,\{k^2 - b\,\mathfrak{I}\,k^4 + (2\,b^2 - a\,c)\,\mathfrak{I}^2\,k^6\},$$

ou, ce qui revient au même

$$(78)\qquad s^2 = a\,\mathfrak{I}\,k^2 - a\,b\,\mathfrak{I}^2\,k^4 + (2\,a\,b^2 - a^2\,c)\,\mathfrak{I}^3\,k^6.$$

Si l'on continue de prendre pour unité de temps, le quotient qu'on obtient en divisant une seconde sexagésimale par mille millions de millions, c'est à dire, par $(10)^{15}$, on devra, dans les formules (77) et (78), aussi bien que dans la formule (55), attribuer aux coefficients a, b, c les valeurs que fournit le 5e tableau. Si au contraire on prend simplement pour unité de temps la seconde sexagésimale, on devra diviser les valeurs de b tirées du 5e tableau par $(10)^{30}$ et les valeurs de b^2 et de c par $(10)^{60}$. Alors la formule (77) donnera

(79)

pour l'eau . . . . . . $\frac{s^2}{(10)^{30}} = 5{,}4890 \left\{ \frac{k^2}{(10)^{14}} - 0{,}00808 \frac{k^4}{(10)^{28}} + 0{,}000373 \frac{k^6}{(10)^{42}} \right\},$

pour la solution de potasse . $\frac{s^2}{(10)^{30}} = 4{,}9712 \left\{ \frac{k^2}{(10)^{14}} - 0{,}00815 \frac{k^4}{(10)^{28}} + 0{,}000263 \frac{k^6}{(10)^{42}} \right\},$

pour le crownglass 1. espèce $\frac{s^2}{(10)^{30}} = 4{,}1935 \left\{ \frac{k^2}{(10)^{14}} - 0{,}00700 \frac{k^4}{(10)^{28}} + 0{,}000113 \frac{k^6}{(10)^{42}} \right\},$

2. espèce $\frac{s^2}{(10)^{30}} = 4{,}1858 \left\{ \frac{k^2}{(10)^{14}} - 0{,}00707 \frac{k^4}{(10)^{28}} + 0{,}000111 \frac{k^6}{(10)^{42}} \right\},$

3. espèce $\frac{s^2}{(10)^{30}} = 4{,}0378 \left\{ \frac{k^2}{(10)^{14}} - 0{,}00749 \frac{k^4}{(10)^{28}} + 0{,}000061 \frac{k^6}{(10)^{42}} \right\},$

pour le flintglass 1. espèce $\frac{s^2}{(10)^{30}} = 3{,}8241 \left\{ \frac{k^2}{(10)^{14}} - 0{,}00941 \frac{k^4}{(10)^{28}} - 0{,}000052 \frac{k^6}{(10)^{42}} \right\},$

2. espèce $\frac{s^2}{(10)^{30}} = 3{,}7298 \left\{ \frac{k^2}{(10)^{14}} - 0{,}00988 \frac{k^4}{(10)^{28}} - 0{,}000069 \frac{k^6}{(10)^{42}} \right\},$

3. espèce $\frac{s^2}{(10)^{30}} = 3{,}7172 \left\{ \frac{k^2}{(10)^{14}} - 0{,}00996 \frac{k^4}{(10)^{28}} - 0{,}000071 \frac{k^6}{(10)^{42}} \right\},$

4. espèce $\frac{s^2}{(10)^{30}} = 3{,}7152 \left\{ \frac{k^2}{(10)^{14}} - 0{,}01055 \frac{k^4}{(10)^{28}} + 0{,}000016 \frac{k^6}{(10)^{42}} \right\},$

la valeur de k étant variable non seulement avec la couleur, mais encore avec la substauce que l'on considère et déterminée par l'équation

(2) $$k = \frac{2\pi}{l}.$$

Si dans les seconds membres des formules (79) on écrivait θk aulieu de k, les valeurs de k deviendraient relatives à l'air, et seraient telles que les présente le tableau suivant.

IX. TABLEAU.
Valeurs de k dans l'air.

Indication des rayons.	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
$L(l)$	8374930	8172000	7699176	7209611	6850986	6325176	5911557
$L\left(\frac{1}{l}\right)$	1625070	1828000	2300324	2790389	3149014	3674824	4058443
$L(2\pi)$	7981799	7981799	7981799	7981799	7981799	7981799	7981799
logarithmes de $k = \frac{2\pi}{l}$	9606869	9809799	0282323	0772188	1130813	1656623	2040212
$\frac{k}{(10)^7}$	0,9135	0,9571	1,0672	1,1946	1,2974	1,4644	1,5996

En multipliant une des valeurs de $\frac{k}{(10)^7}$ tirées du 9e tableau par la valeur de θ relative au même rayon et à une substance donnée, on obtiendra la valeur de $\frac{k}{(10)^7}$ relative au rayon et à la substance dont il s'agit. Ainsi, par exemple, en faisant usage des logarithmes, on trouvera, pour les valeurs de k relatives à la solution de potasse, celles que fournit le tableau suivant.

X. TABLEAU.

Valeurs de k relatives à la solution de potasse.

Indication des rayons.	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
$L(\theta)$	1460129	1462878	1469974	1478716	1486280	1500129	1511762
$L(k)$ . . . . air	9606869	9809799	0282323	0772188	1130813	1656623	2010212
$L(k)$ ... solution de potasse	1068998	1272677	1752297	2250904	2617093	8156752	3552004
$\frac{k}{(10)^7}$ ... solution de potasse	1,2785	1,3105	1,4970	1,6792	1,8269	2,0686	2,2657

Or, si l'on substitue ces dernières valeurs de $\frac{k}{(10)^7}$ dans la seconde des équations (79), ou, ce qui revient au même, dans la formule

$$(80) \qquad \frac{s^2}{(10)^{30}} = 4{,}9712\,\frac{k^2}{(10)^{14}} - 0{,}04045\,\frac{k^4}{(10)^{28}} + 0{,}00131\,\frac{k^6}{(10)^{42}},$$

on obtiendra, comme on devait, s'y attendre, des valeurs de $\frac{s^2}{(10)^{30}}$ et de $\frac{s}{(10)^{15}}$, sensiblement égales aux valeurs de s^2 et de s renfermées dans le premier tableau; et telles qu'on les trouve inscrites dans celui que nous allons tracer.

XI. TABLEAU.

Valeurs de s^2 tirées de la formule (70).

Indication des rayons.	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
$4{,}9712\,\frac{k^2}{(10)^{14}}$	8,1256	8,9329	11,141	14,016	16,591	21,272	25,519
$-0{,}01015\,\frac{k^4}{(10)^{28}}$	-0,1081	-0,1306	-0,203	-0,322	-0,451	-0,711	-1,066
$0{,}00131\,.\frac{k^6}{(10)^{42}}$	0,0057	0,0076	0,015	0,029	0,049	0,102	0,177
$\frac{s^2}{(10)^{30}}$	8,0232	8,8099	10,953	13,723	16,189	20,633	21,630
$\frac{s}{(10)^{15}}$	2,833	2,968	3,310	3,704	4,024	4,542	4,963

Les différences qui existent entre les valeurs de s ou de $\frac{s}{(10)^{15}}$ fournies par le 1er et le 11e tableau sont inférieures aux variations que produisent les erreurs d'observation. Effectivement l'on tire des formules (2) et (3)

$$(81) \qquad l = \frac{2\pi\,\Omega}{s};$$

et, si l'on substitue dans l'équation (81) les valeurs de s fournies par le 11e tableau, en prenant pour Ω la vitesse de propagation de la lumière dans l'air, c'est à dire en posant

$$\Omega = \frac{310177500}{1,000276},\ L(\Omega) = 8,4914905,$$

on obtiendra les valeurs suivantes des longueurs d'ondulation dans l'air

XII. TABLEAU.

Valeurs de l tirées de la formule (81) jointe au 11e tableau.

	B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
en dix-millionièmes de millimètre	6879	6564	5887	5260	4842	4289	3926
en cent-millionièmes de pouce	2541	2425	2175	1943	1789	1585	1450

Or, si l'on compare les valeurs de l inscrites dans la dernière ligne horizontale du 12e tableau à celles qui ont été fournies par l'expérience et que nous avons placées en tête du 2e tableau [§ 6], on reconnaîtra qu'elles ne diffèrent point les unes des autres, si l'on en excepte toutefois les valeurs relatives au rayon *H*. Observons d'ailleurs que la différence des nombres

1451 et 1450

qui, dans les deux tableaux, représentent l'épaisseur des ondes relatives au rayon *H*, exprimée en cent millionièmes de pouce, se réduit à une seule unité de l'ordre indiqué par le dernier chiffre; et que, les expériences de *Frauenhofer* qui déterminent les épaisseurs d'ondes, exprimées en cent millionièmes de pouce, fournissent souvent pour un même rayon des nombres dont les derniers chiffres diffèrent entre eux d'une ou de plusieurs unités.

C'est en observant les phénomènes produits par des réseaux composés de fils métalliques parallèles les uns aux autres, que *Frauenhofer* a obtenu les nombres inscrits en tête du 2e tableau [§ 6], savoir

(a) 2541; 2425; 2175; 1943; 1789; 1585; 1451.

On peut consulter à ce sujet le memoire lu par ce physicien à l'académie de Munich

le 14. juni 1823. Les nombres dont il s'agit, y sont donnés dans les premieres pages, et se trouvent, à la fin du mémoire, remplacés par les suivants

(b) ....; 2422; 2175; 1945; 1794; 1587; 1464.

Les épaisseurs d'ondes représentées par les nombres (a) et transformées en millimètres ont été adoptées par quelques physiciens, (voyez entre autres la physique de *Pouillet*). D'autres physiciens, *Herschel* par exemple, ont adopté les épaisseurs d'ondes représentées par les nombres (b); en placant à la tête de ceuxci le premier des nombres (a). Par conséquent ils ont supposé que les longueurs des ondes, exprimées en cent-millionièmes de pouce, etaient représentées, pour les rayons

$$B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,$$

par les nombres

(c) 2541; 2422; 2175; 1945; 1794; 1587; 1464.

Les deux suites de nombres (a) et (c) sont complétement d'accord dans le premier et le troisième terme. Elles s'accordent encore sensiblement dans le quatrième et le sixième. Mais elles diffèrent assez notablement dans le septième ou dernier terme. D'ailleurs les formules établies dans le présent mémoire permettent de faire servir trois termes supposés connus à la détermination des quatre autres, ainsi que nous allons le faire voir.

En raisonnant comme dans le § 7 [pages 161 et 162], et négligeant les différences du 4e ordre, ou même celles du troisième, on deduira des formules (50) et (51) d'autres formules propres a déterminer la valeur générale de Θ_i, quand on connaîtra les valeurs particulières de

$$\Theta_1,\ \Theta_2,\ \Theta_3,\ \Theta_4$$

ou même simplement les valeurs de

$$\Theta_1,\ \Theta_2,\ \Theta_3.$$

Ces formules coincideront avec l'équation (27) du § 7, et avec celle qu'on en déduit quand on supprime le dernier terme du second membre, parconséquent avec la suivante

$$(82)\qquad \Theta_i = \Theta_1 + \frac{\beta_i-\beta_1}{\beta_2-\beta_1}(\Theta_2-\Theta_1) + \frac{\beta_i-\beta_1}{\beta_3-\beta_1}\,\frac{\gamma_i'-\gamma_2'}{\gamma_3'-\gamma_2'}\left\{\Theta_3-\Theta_1-\frac{\beta_3-\beta_1}{\beta_2-\beta_1}(\Theta_2-\Theta_1)\right\},$$

le valeur de γ_i' etant

$$(83)\qquad \gamma_i' + \frac{\gamma_i-\gamma_1}{\beta_i-\beta_1}.$$

Pareillement, en supposant toujours que l'on néglige les différences finies du troisième ordre, c'est à dire les quantités

$$\Delta^3\Theta_i,\ \Delta^3 s_i'',\ \Delta^3 k_i'',\ \Delta^3 l_i^{-''},$$

on déduira des équations (43), (44), (45) d'autres équations qui serviront à déterminer les valeurs générales des quantités

$$s_i^n, \quad k_i^n, \quad l_i^{-n}$$

quand on connaîtra leurs valeurs particulières correspondantes à trois valeurs données de i. Ainsi, par exemple, en posant $n=2$, et regardant comme connues les valeurs de l_i^{-2} correspondantes à $i=1$, $i=3$, $i=6$, on tirera de l'équation (45)

$$(84)\quad l_i^{-2}=l_1^{-2}+\frac{\beta_i-\beta_1}{\beta_3-\beta_1}(l_3^{-2}-l_1^{-2})+\frac{\beta_i-\beta_1}{\beta_6-\beta_1}\frac{\gamma_i'-\gamma_1'}{\gamma_6'-\gamma_1'}\left\{l_6^{-2}-l_1^{-2}-\frac{\beta_6-\beta_1}{\beta_3-\beta_1}(l_3^{-2}-l_1^{-2})\right\}.$$

Si maintenant on fait, pour abréger,

$$(85)\qquad B_i=\frac{\beta_i-\beta_1}{\beta_3-\beta_1},\qquad C_i=\frac{(\beta_i-\beta_1)(\gamma_i''-\gamma_1')}{(\beta_6-\beta_1)(\gamma_6'-\gamma_1')},\qquad D_i=B_i-B_6\,C_i,$$

la formule (84) donnera simplement

$$(86)\qquad l_i^{-2}=l_1^{-2}+B_i(l_3^{-2}-l_1^{-2})+C_i\left\{l_6^{-2}-l_1^{-2}-B_6(l_3^{-2}-l_1^{-2})\right\},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(87)\qquad l_i^{-2}=(1-D_i-C_i)\,l_1^{-2}+D_i\,l_3^{-2}+C_i\,l_6^{-2}.$$

Enfin, si dans les équations (83) et (85) on substitue les valeurs de β_i et γ_i trouvées dans le 8e paragraphe, on déduira aisément de ces formules les valeurs de

$$\gamma_i', \quad B_i, \quad C_i \quad \text{et} \quad D_i$$

comprises dans le tableau que nous allons tracer.

XIII. TABLEAU.

Valeurs de γ_i', B_i, C_i, D_i.

i	1	2	3	4	5	6	7	Sommes.
β_i	0,190868	0,168734	0,108921	0,031477	-0,038125	-0,171610	-0,290264	0,000001
β_1	1,190868	0,190868	0,190868	0,190868	0,190868	0,190868	0,190868	1,336076
$\beta_i-\beta_1$	0	-0,022131	-0,081947	-0,159391	-0,228993	0,362178	-0,481132	-1,336075
γ_i	-0,16970	-0,08510	0,07534	0,17921	0,19999	0,04521	-0,24511	-0,00013
γ_1	-0,16970	-0,16970	-0,16970	-0,16970	-0,16970	-0,16970	-0,16970	-1,18790
$\gamma_i-\gamma_1$	0	0,08160	0,24504	0,34891	0,36969	0,21191	-0,07571	1,18717
$L(\pm(\gamma_i-\gamma_1))$		9273704	3892370	5427508	5678377	3322566	8791532	
$L(-(\beta_i-\beta_1))$		3150599	9135331	2024638	3598222	5592817	6822640	
$L(\mp\gamma_i')$		5823105	4757039	3402870	2080155	7729749	1968892	
γ_i'		-3,8222	-2,9902	-2,1892	-1,6144	-0,5929	0,1571	-11,0515
γ_3'		-2,9902	-2,9902	-2,9902	-2,9902	-2,9902	-2,9902	-17,9412
$\gamma_i'-\gamma_3'$		-0,8320	0	0,8010	1,3758	2,3973	3,1476	6,8897
$L(\gamma_i'-\gamma_3')$		9201233		9036325	1385553	3797224	4979795	
$L(-(\beta_i-\beta_1))$		3150599		2024638	3598222	5592817	6822610	
$L(\mp(\beta_i-\beta_1)(\gamma_i'-\gamma_3'))$		2651832		1060963	4983775	9390041	1802435	
$L(-(\beta_6-\beta_1)(\gamma_6'-\gamma_3'))$		9390041		9390041	9390041	9390041	9390041	
$L(\mp C_i)$		3261791		1670922	5593731	0	2412394	
C_i		-0,02119		0,11692	0,36255	1	1,74277	3,23105
$L(-(\beta_i-\beta_1))$		3450599	9135331	2024638	3598222	5592817	6822640	
$L(-(\beta_3-\beta_1))$		9135331	9135331	9135331	9135331	9135331	9135331	
$L(B_i)$		4315268	0	2889307	4462891	6457486	7687309	
$L(B_6)$		6157186		6157186	6157486	6457486	6157186	
$L(\mp C_i)$		3261791		1670922	5593731		2412394	
$L(\mp B_6C_i)$		9719277		8128408	2051220	6157486	8869880	
B_i		0,27010		1,94506	2,79440	4,42332	5,87125	15,30412
B_6C_i		-0,09371		0,64989	1,60370	4,42332	7,70882	14,29199
D_i		0,36384		1,29516	1,19070	0	-1,83757	0,01213
C_i+D_i		0,34265		1,44208	1,55325		-0,09480	3,24318
$1-C_i-D_i$		0,65735		-0,44208	-0,55325		1,09480	0,75682

En conséquence on tirera de la formule (87)

$$
(88)\quad \left\{
\begin{aligned}
l_2^{-2} &= 0,65735\, l_1^{-2} + 0,36384\, l_3^{-2} - 0,02119\, l_6^{-2},\\
l_4^{-2} &= -0,44208\, l_1^{-2} + 1,29516\, l_3^{-2} + 0,14692\, l_6^{-2},\\
l_5^{-2} &= -0,55325\, l_1^{-2} + 1,19070\, l_3^{-2} + 0,36255\, l_6^{-2},\\
l_7^{-2} &= 1,09480\, l_1^{-2} - 1,83757\, l_3^{-2} + 1,74277\, l_6^{-2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Si dans ces dernières équations on substitue les valeurs de l_1, l_3, l_6 qui font par-

tie de la suite (a), ou, ce qui revient au même, si, en prenant pour unité de longueur un cent-millième de pouce, on pose

$$l_1 = 2{,}541\,,\quad l_3 = 2{,}175\,,\quad l_6 = 1{,}585$$

on obtiendra pour

$$l_2\,,\quad l_4\,,\quad l_5\,,\quad l_7$$

les valeurs que détermine le tableau suivant.

XIV. TABLEAU.

Valeurs de l_2, l_4, l_5, l_7 déduites de la formule (87).

i	2	4	5	7
$L(\pm(1-C_i-D_i))$ $L(l_1^{-2})$	8177967 1899906	6455009 1899906	7429214 1899906	0393348 1899906
$L(\pm(1-C_i-D_i)\,l_1^{-2})$	0077873	8351915	9329120	2293251
$L(\pm D_i)$ $L(l_3^{-2})$	5609104 3250814	1123235 3250814	0758024 3250814	2642439 3250814
$L(\pm D_i\,l_3^{-2})$	8859918	4371049	4008838	5893253
$L(\mp C_i)$ $L(l_6^{-2})$	3261791 5999414	1670922 5999414	5593734 5999414	2412394 5999114
$L(\mp C_i\,l_6^{-2})$	9261205	7670336	1593148	8411808
$(1-C_i-D_i)\,l_1^{-2}$ $D_i\,l_3^{-2}$ $C_i\,l_6^{-2}$	0,10181 0,07691 -0,00844	-0,06817 0,27378 0,05848	-0,08369 0,25170 0,14132	0,16956 -0,38814 0,69371
l_i^{-2}	0,17028	0,26379	0,31033	0,47483
$L(l_i^{-2})$	2311636	4212583	4918238	6765382
$L(l_i^{-1})$	6155818	7106292	7459119	8382691
$L(l_i)$	3844182	2893708	2540881	1617309
l_i	2,423	1,947	1,795	1,451

Ainsi, en adoptant comme exactes les valeurs de l_1, l_3 et l_6 représentées par le premier, le troisième et le 6e terme de la suite (a), nous sommes conduits, par l'application de la formule (87), à remplacer la suite dont il s'agit par cette autre suite de nombres

(d) 2541; 2423; 2175; 1947; 1795; 1585; 1451.

Si au sixième terme de la suite (a) en substituait le sixième terme de la suite (b), les nombres (d) se trouveraient, en vertu de la formule (87), remplacés par les suivants

(e) 2541; 2423; 2175; 1948; 1796; 1587; 1454.

En comparant les nombres (d) et (e) aux nombres (a) et (c), on reconnait que, si des deux suites (a) et (c) la première s'accorde moins bien avec les suites (d) et (e) dans le second, le quatrième et le cinquième terme, elle s'en rapproche beaucoup plus dans le septième terme dont la variation, quand on passe de la suite (a) à la suite (d) ou (e), est nulle ou seulement égale à trois unités de l'ordre indiqué par le dernier chiffre, et s'élève au contraire à treize unités du même ordre lorsqu'on passe des nombres (c) aux nombres (d).

En terminant ce paragraphe nous ferons observer que les équations (43), (44), (45) et (50) ont une grande analogie avec une formule du même genre que j'ai donnée dans un mémoire lithographié sur l'interpolation, et à l'aide de laquelle on pourrait encore développer aisément deux des trois quantités

$$\theta, \quad s \quad \text{et} \quad k \quad \text{ou} \quad I^{-1}$$

suivant les puissances ascendantes de la troisième.

---

§. 12. *Sur les résultats que fournit l'approximation du premier ordre.*

Le 11e tableau du paragraphe 11 fournit les valeurs approchées de s^2 que l'on déduit de la formule (77) ou (78), en supposant les valeurs de a, b, c, $\mathfrak{I}$ relatives à la solution de potasse. Chacune de ces valeurs approchées se compose de trois termes dont les deux derniers sont comparables aux valeurs de $\Delta\Theta_i$ et de $\Delta^2\Theta_i$, c'est à dire, aux différences finies du premier et du second ordre; et l'on reconnait immédiatement à l'inspection du tableau 11 [§ 11] que le troisième terme, c'est à dire, le terme du second ordre est toujours moindre que la centième partie du premier. Il en est ainsi pour toutes les substances, même pour l'eau, quoique le coefficient de $\frac{k^6}{(10)^{42}}$ soit, dans la première des formules (79), beaucoup plus considérable que dans les suivantes. Effectivement la valeur de $\frac{k}{(10)^7}$ relative à l'eau et au rayon H, ou le produit

$$1{,}3442 \times 1{,}5996 = 2{,}1502$$

a pour quatrième puissance le nombre

$$21{,}375$$

et le produit de ces derniers nombres par le coefficient 0,000373, savoir,

$$21{,}375 \times 0{,}000373 = 0{,}00797,$$

est inférieur à un centième. Or ce produit représentera évidemment le rapport des termes proportionels à k^4 et à k^2 dans le trinome que renferme la première des formules (79).

Il suit de ce qu'on vient de dire que les formules (79) et autres du § 11 précédent seront encore sensiblement exactes, si l'on y néglige les termes du second ordre. Alors, en posant pour abréger

$$(1) \qquad a\mathfrak{J} = \mathfrak{R}, \quad b\mathfrak{J} = \mathfrak{K}, \quad \mathfrak{K}\mathfrak{R} = \mathfrak{R}'$$

on réduira la formule (76) à

$$(2) \qquad \frac{s^2}{k^2} = \Omega^2 = \mathfrak{R}\,(1 - \mathfrak{K}k^2) = \mathfrak{R} - \mathfrak{R}'\,k^2.$$

On peut d'ailleurs établir directement cette dernière formule de la manière suivante.

Concevons que les vibrations du fluide éthéré s'exécutent dans un milieu où la propagation du mouvement reste la même en tous sens, et considérons un rayon dans lequel les déplacements moléculaires soient parallèles à l'axe des x. On devra, dans la première des formules (16) du § 1, supposer

$$\eta = 0, \quad \zeta = 0,$$

et ξ fonction des seules variables indépendantes y, t. Donc cette formule donnera simplement

$$(3) \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = \mathrm{S}\left\{m\,\frac{\mathrm{f}(r) + \cos^2\alpha\, f(r)}{r}\,\Delta\xi\right\}.$$

De plus, $\Delta\xi$ étant l'accroissement de la fonction ξ, correspondant à l'accroissement Δy ou $r\cos\beta$ de la variable y, on aura, par le théorème de *Taylor*

$$(4) \qquad \Delta\xi = r\cos\beta\,\frac{d\xi}{dy} + \frac{r^2\cos^2\beta}{1.2}\,\frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{r^3\cos^3\beta}{1.2.3}\,\frac{d^3\xi}{dy^3} + \frac{r^4\cos^4\beta}{1.2.3.4}\,\frac{d^4\xi}{dy^4} + \text{etc.}$$

En substituant la valeur précédente de $\Delta\xi$ dans l'équation (3), négligeant les sommes qui renferment sous le signe S des puissances impaires de $\cos\beta$, et posant pour abréger

$$(5) \qquad \mathfrak{R} = \mathrm{S}\left\{\frac{mr}{2}\,[\mathrm{f}(r) + \cos^2\alpha\, f(r)]\cos^2\beta\right\}, \quad \mathfrak{R}' = \mathrm{S}\left\{\frac{mr^3}{2.3.4}\,[\mathrm{f}(r) + \cos^2\alpha\, f(r)]\cos^4\beta\right\},$$

on obtiendra la formule

$$(6) \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = \mathfrak{R}\,\frac{d^2\xi}{dx^2} + \mathfrak{R}'\,\frac{d^4\xi}{dx^4} + \text{etc.}\ldots$$

qui devient

(7) $$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \mathfrak{N}\frac{d^2\xi}{dx^2} + \mathfrak{N}'\frac{d^4\xi}{dx^4},$$

lorsqu'on réduit la série comprise dans le second membre à ses deux premiers termes. Si d'ailleurs on choisit pour origine des coordonnées un point où les molécules d'éther ne soient pas deplacées dans le premier instant, ξ devra s'évanouir quand on supposera simultanément

$$y = 0, \quad t = 0;$$

et l'on vérifiera cette condition, ainsi que la formule (7), en posant

(8) $$\xi = \mathfrak{A} \sin(k(y \pm \Omega t))$$

(9) $$\Omega^2 = \mathfrak{N} - \mathfrak{N}' k^2.$$

C'est a très peu près en suivant cette méthode que j'avais établi la formule (2) ou (9) dans un mémoire présenté à l'académie des sciences le 14 juin 1830. Cette même méthode a été publiée ainsi que les formules (7), (8) et (9) dans le bulletin des sciences de M. *de Férussac* [tome XIV, année 1830, page 9]; et si elle a été proposée depuis dans un article du philosophical Magazine [janvier 1836] comme propre à simplifier les calculs developpés dans le mémoire sur la dispersion, cela tient évidemment à ce que l'auteur de l'article n'avoit point sous les yeux le tome XIV du bulletin ci-dessus mentionné.

Lorsque l'on considère le terme

$$\mathfrak{K} k^2 = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}'} k^2$$

comme une quantité dont le carré peut être négligé, on a

(10) $$1 - \mathfrak{K} k^2 = \frac{\sin(k\sqrt{6\mathfrak{K}})}{k\sqrt{6\mathfrak{K}}}$$

et l'équation (2) ou (9) devient

(11) $$\Omega^2 = \mathfrak{N}\frac{\sin(k\sqrt{6\mathfrak{K}})}{k\sqrt{6\mathfrak{K}}}.$$

C'est sous cette dernière forme que l'équation (9) été présentée et vérifiée à l'aide des expériences de *Frauenhofer* par M. *B. Powel* dans plusieurs articles que renferment les philosophical Transactions et le philosophical Magazine.

(Extrait des mémoires publiés par la société royale des sciences de Prague.)

ERRATA.

Pages.	Lignes.	Fautes	Corrections.
5	17	$\Delta\gamma$	$\Delta\zeta$
12	dernière	s^2	s^{-2}
14	17	$\Omega(r-\Phi t)$	$\Phi(r-\Omega t)$
25	24	des	de
30	12	se réduiront	se réduiront à
37	13 et 14	conditions	conclusions
46	7 et 10	fonctions	fonction
55	22	l'égard	égard
—	26	(18)	(78)
56	1	a_n	$(-1)^{n+1} a_n$
57	1	compiette	compiète
—	8 et 27	§ 3	§ 4
59	avant dernière	$\frac{s'}{k'} = \frac{s}{k}$	$\frac{s'}{k'} = \frac{s}{k'}$
61	9	a_n	$(-1)^{n+1} a_n$
63	14	dix-millionième	dix-millionièmes
77	4	$\pm$	$+$
—	19	quuod	quand
79	28	(70)	(60)
91	19	(120)	(122)
95	6	2,162630	2,162360
—	10	1,711806	2,711806
—	12	28,958542	28,958742
96	11	agant	ayant
—	17	remplacer	remplacer la formule (124) par
—	24	(127)	(126)
—	avant dernière	ou	on
97	dernière	résultas	résultats
131	7	$\Delta^n\Theta_i$	$\Delta^n\theta_i$
133	21	ou	on
146	7	0,009113	0,000113
149	9	premier nombre	second membre
151	14	38,391965	28,391965
152	14	particulieurs	particulières
—	17	parteculieres d'un	particulières d'une
153	26	substituer	substituer aux quantités $\Theta, U'-\Theta, \ldots; \beta_i, \gamma_i, \delta_i$

Pages.	*Lignes.*	*Fautes.*	*Corrections.*
153	27	$U' = S'\Theta_i$	$\mathfrak{U} = S'\Delta\Theta_i$
—	ibid	$U'' = S''\Theta_i$	$\mathfrak{V} = S''\Delta^2\Theta_i$
—	ibid	$U''' = S'''\Theta_i$	$\mathfrak{W} = S'''\Delta^3\Theta_i$
154	2 et suiv.	U', U'', U'''	$\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$
159	8	2,623574	1,623574
160	29	$\Theta_i = \Delta\Theta_i$	$\Theta_i - \Delta\Theta_i$
166	dernière	4,995358	1,995358
176	6	c'est à dire	et par suite
—	8	. Comme	, comme
177	6	0,002622	0,003622
—	8	5141494	5141491
178	12	89	91
—	21	9222193	3222193
181	avant dernière	(11)	(11) ou (16)
182	1 et suiv.	U, U', U''	$\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$
185	22	proportionaille	proportionnelle
186	1	ou	on
187	dernière	§ 6	§ 3
188	18	rayons	rayon
189	2	ce	en
190	7	uue	une
194	3	l'undice	l'indice
199	36 et 40	ou	on
201	24	$t =$	$-t =$
202	19 et 22	§ 4	§ 5
203	23	ou	on
—	29	$\frac{d\xi'}{dx} - \frac{d\eta'}{dx}$	$\frac{d\xi'}{dy} - \frac{d\eta'}{dx}$
204	14 et 16	on	ou
206	18	es	les
208	15	ls	le
213	9	$-$ 0,0025	0,0025
228	1	juni	juin
—	30	$\gamma_i' +$	$\gamma_i' =$



